وزارة المعارف العمومية

كتاب
الديناميكا والايدروستاتيكا

تأليف

ر . ه . بنكرتون

ترجم الى العربية بأمر وزارة المعارف العمومية.

الطبعة الأولى
بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩١٥

وزارة المعارف العمومية

كتاب
الديناميكا والايدروستاتيكا

تأليف

ر . ه . پنكرتون

ترجم الى العربية بأمر وزارة المعارف العمومية .

الطبعة الأولى
بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩١٥

كتاب الدينـاميكا والايدروســـتاتيكا

(٥٠٠٠/١٩١٤/٧٠٧٣/م٠م)

وزارة المعارف العمومية

كتاب
الديناميكا والايدروستاتيكا

تأليف
ر . ه . پنكرتون

ترجم الى العربية بأمر وزارة المعارف العمومية

الطبعة الأولى
بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩١٥

محتـــويات الكتاب

محتويات الكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب الديناميكا

الباب الأوّل ـ تعـــاريف

بند ١ ـ الديناميكا ـ هو ذلك الفرع من الفلسفة الطبيعية الذى يبحث فى تأثير القـــوى فى المـادة .

بند ٢ ـ المـادة ـ هى كل ما يمكن أن يتأثر بالقوى .

الأجسام ـ فى علم الديناميكا هى أجزاء المـادة .

ويسمى مقدار مافى الجسم من المـادة بكتلة الجسم .

بند ٣ ـ الأجسام الصلبة والسوائل والغـازات .

تكون الأجسام على أحوال ثلاث وهى : (١) الصلابة و (٢) السيولة و (٣) الغازية . وتختلف السوائل والغازات عن الأجسام الصلبة فى أنها لا تتحمل أقل ضغط . وتختلف الغازات عن السوائل فى ميلها الى الانتشار غير المحدود . فالأجسام الصلبة لهـا شكل محدود وحجم ثابت . والأجسام السائلة لها حجم ثابت فقط . والأجسام الغازية ليس لها حجم ثابت ولا شكل محدود .

وكثير من الأجسام يمكن أن يكون على الأحوال الثلاث .

(مثـال ذلك) المـادة التى تكون ثلجا فى حالة الصلابة وماء فى حالة السيولة وبخارا فى حالة الغـازية .

بند ٤ — القـــوة .

القـــوة — هى كل ما يحدث تغيرا أو يفضى الى احداث تغير فى حركة المـادة التى يؤثر فيها ويتعلق تصوّر القوّة بتصوّر المـادة . فلا يمكن أن نعتبر القوّة إلا بتأثيرها فى المـادة ويجب اعتبار "التغير فى الحركة" المذكور فى التعريف المتقدّم بمعناه الكلى فنعتبر أنه حدث تغـير فى الحركة إذا زاد أو نقص معـدّل حركة الجسم . وكذلك اذا تحوّل من حالة السكون الى حالة التحرك أو العكس . أو اذا تغير اتجاه حركة الجسم .

وللتمثيل لتأثير القوى نعتبر مايحدث فى الرصاصة عند إطلاق بندقية . فنرى أنه قبل إطلاقها تكون ساكنة و بعد الفرقعة مباشرة تتحرك بسرعة كبيرة جدا . فهذا مثال فيه تغيرت حالة الجسم (الرصاصـة) من السكون الى التحرك . فقد حدث تغير فى حركة الرصاصة . فكما سبق فى تعريف القوّة يكون هذا التغير قد نشأ عن قوّة . وهى عبارة عن ضغط الغازات الناتجة من الفرقعة للرصاصة أثناء سيرها فى الأنبوبة .

واذا تحرك قطار فى منحن على شكل ربع دائرة حركة منتظمة نرى أنه لم يحدث تغير فى معدّل حركة القطار أثنـاء تحركه فى المنحنى غير أنه قد حدث تغير فى اتجاه تحركه . اذ أن اتجاه الحركة قد تغير بمقـدار زاوية قائمة أثناء مروره على المنحنى . فقد حدث تغير فى حركة القطار . وهذا التغير لابد أن يكون ناشئا من قوّة . والقوّة فى هذه الحالة هى ضغط الخط الحديدى من الخارج على عجلات العربات والقاطرة .

بند ٥ — وحدات القوّة .

من المعتـاد أن نحكم على قوّة ما بأنها تساوى كذا من الكيلوجرامات أو كذا من الباوندات فمثلا يُدَلُّ عادة على قوّة بخار مرجل أو ضـغطه بعدد مرقوم على مقيـاس الضغط يبين عدد الكيلوجرامات الضاغطة على كل سنتيمتر مربع من سطح المرجل .

فنرى أن القوّة تعتبر عادة مقدارا يمكن قياسه وأن العدد الذى يدل على مقدارها هو عدد مرات احتواء تلك القوّة على وحدة معلومة للقوّة . فعند قياس قوّة بخـار مرجل اعتبرت الوحدة القوّة التى تعادل ثقل الكيلوجرام الواحد .

إلا أن هناك سببا علميا يمنع اتخاذ ثقل الكيلو جرام وحدة للقوة . وذلك أن ثقل الكيلو جرام من المادة غير ثابت . لأننا لو أخذنا مقدارا معينا من المادة نجد وزنه فى الاسكندرية أكثر من وزنه فى القاهرة . ووزنه فى أسيوط أقل من وزنه فى القاهرة . ويقال على الاجمال إننا كلما قربنا من خط الاستواء قل ثقل كتلة معينة وسنوضح فى باب آخر سبب اختلاف ثقل كتلة معينة باختلاف الجهات على سطح الكرة الأرضية . وما نبغى فى هذا المقام إلا الاشارة الى أن ثقل الكيلو جرام من المادة غير ثابت . فلا يمكن اتخاذه وحدة للقوة فى الحساب المضبوط .

وقبل أن نشرع فى إيضاح طريقة الوصول الى وحدة ثابتة للقوة يلزمنا أن نعتبر بعض أحوال حركة الأجسام دون اعتبار القوى التى تنشأ الحركة عنها ويسمى العلم الذى يبحث فى الحركة من غير أن يبحث فى القوى التى تنشأ عنها الحركة بعلم الكينماتيكا. وهو فى الحقيقة فرع من الرياضة النظرية .

بند ٦ — يمكننا ترتيب علم الميكانيكا كما يأتى :

الكينماتيكا — (وهو علم الحركة) .

الديناميكا — ويشمل

(١) الاستاتيكا .
(الذى يبحث فى الاجسام الصلبة الساكنة تحت تأثير القوى) .

(٢) الكينيتيكا .
(الذى يبحث فى الحركة الناشئة من تأثير القوى فى الاجسام الصلبة) .

(٣) الايدروستاتيكا .
(الذى يبحث فى توازن السوائل والغازات تحت تأثير القوى) .

الباب الثانى — الكينماتيكا

الفصل الأول

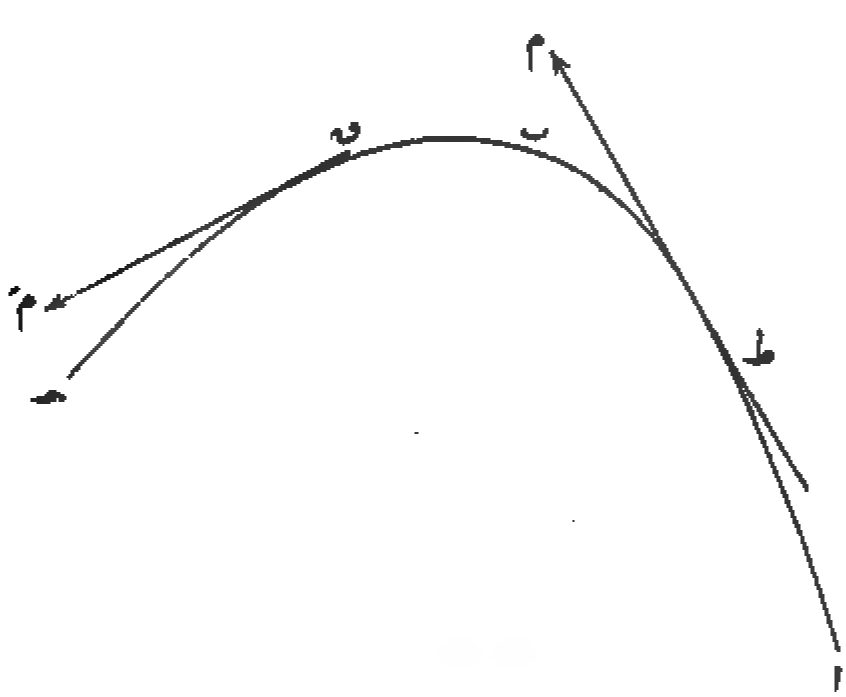
السرعة

بند ٧ — الحركة — مسار الحركة — اتجاه الحركة .

يقال ان الجسم متحرك اذا تغيرت أوضاعه آنا فآنا .

ولا حاجة فى أغلب أحوال الحركة التى تبحث فيها الديناميكا الابتدائية الى اعتبار حجم الجسم المتحرك . ولذا يمكننا أن نعتبر الجسم نقطة رياضية لها وضع وليس لها حجم .

اذا تحرك جسم فان المستقيم أو الخط المنحنى الذى يتحرك فيه يسمى مسار الحركة . فان كان المسار مستقيما كان اتجاه الحركة مستقيما . وان كان منحنيا فان اتجاهها يكون دائما متغيرا . ويكون اتجاه الحركة فى نقطة معينة هو اتجاه المماس للمنحنى فى تلك النقطة . فمثلا اذا تحرك جسم فى المنحنى ا ب حـ فان اتجاه الحركة حين يكون الجسم فى الوضع ط هو ط م الذى يمس المنحنى فى النقطة ط وكذلك فى الوضع و يكون اتجاه الحركة و مَ المماس فى و فالجسم أثناء تحركه فى المنحنى من ط الى و يتغير اتجاه حركته من ط م الى و مَ .



بند ٨ ـ السـرعة .

سرعة الجسم هى معدّل حركته .

وتكون السرعة منتظمة أو متغيرة .

بند ٩ ـ السـرعة المنتظمة .

اذا قطع جسم متحرّك مسافات متساوية فى أزمنة متساوية (مهما كانت تلك الأزمنة قصيرة) قيل أنه يتحرّك بسرعة منتظمة .

ويظهر معنى قولنا "مهما كانت تلك الأزمنة قصيرة" من المثال الآتى :

اذا قام قطار من محطة ا ومرّ بمحطة ب بعد ساعة ثم بمحطة ح بعد ساعتين من وقت قيامه وكان ا ب = ب ح = ٣٠ ميلا نرى فى ذلك مثالا لجسم



متحرّك يقطع المسافتين المتساويتين ا ب ، ب ح فى زمنين متساويين . ولكن ذلك لا يستلزم انتظام سرعته فلربما يكون القطار أثناء سيره من ا الى ب تارة ساكنا وأخرى متحرّكا بسرعة ٧٠ ميلا فى الساعة وكذلك ربما يكون قد عرض مثل هذا التغير فى سيره من ب الى ح .

فمن ذلك يتضح أنه ليس من الضرورى أن تكون السرعة بين ا ، ح منتظمة . ولكن اذا قطع ذلك القطار أثناء سيره من ا الى ح ٤٤ قدما فى كل ثانيـة ضاق نطاق التغيير الممكن حدوثه وحينئذ تكاد تكون السرعة منتظمة على التقريب ان لم تكن منتظمة تماما . ولكن اذا علمنا أنه قطع ٤٫٤ من الأقدام فى كل عُشر ثانية أمكننا أن نقول إن السرعة لابد أن تكون قريبة جدّا من الانتظام . ولو علمنا أيضا أنه قطع فى كل جزء من مائة من الثانيـة ٠٫٤٤ من القدم أو فى كل $\frac{١}{١٠٠٠}$ من الثانية ٠٫٠٤٤ من القدم أو فى كل $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ من الثانيـة ٠٫٠٠٤٤ من القدم وهكذا زاد يقيننا بأن السرعة منتظمة . وعلى هذا المنوال يمكن الوصول الى ادراك معنى السرعة المنتظمة وهى السرعة التى بها يقطع الجسم مسافات متساوية فى أزمنة متساوية مهما كان قصرها .

بند ١٠ — السرعة المنتظمة كمية يمكن تقديرها .

قياس السرعة هو عدد مرات احتوائها على وحدة السرعة . ووحدة السرعة هى السرعة التى بها يقطع جسم وحدة الطول فى وحدة الزمن . ويتضح من ذلك أن مقدار وحدة السرعة وكذا مقدار أى سرعة أخرى يتوقف على وحدتى الطول والزمن .

بند ١١ — الوحـــدات المستعملة .

هناك قاعدتان للوحدات التى يستعملها علماء الطبيعة فى وقتنا هذا .

ففى احدى القاعدتين وهى القاعدة الفرنسـية يتخذ السنتيمتر وحدة للطول والثانيـة وحدة للزمن وحينئذ تكون وحدة السرعة فى هذه القاعدة هى السنتيمتر فى الثانية . وتمثل هذه السرعة بالعدد ١ والعدد الذى يدل على مقدار أى سرعة أخرى يكون عدد مرات احتواء هــذه السرعة على وحدة السرعة أو بعبارة أخرى يكون عدد السنتيمترات التى يقطعها الجسم فى الثانية .

وفى القاعدة الأخرى وهى القاعدة الانجليزية يتخذ القدم وحدة للطول والثانية وحدة للزمن . وعلى ذلك تكون وحدة السرعة هنا هى القدم فى الثانية . وتقدر أى سرعة أخرى بعدد الأقدام التى يقطعها الجسم فى الثانية الواحدة .

ولمقارنة سرعتين يجب أولا أن نعـبر احداهما بالوحدات التى نعبر بهـا الأخرى ثم نقارن بين العددين اللذين تقدران بهما . فمثلا سرعة ٤٤ قدما فى الثانية تكون نصف سرعة ٨٨ قدما فى الثانيـة وضعف سرعة ٢٢ قدما فى الثانية وسرعة ا من الأقدام فى الثانية هى قدر سرعة ب من الأقدام فى الثانية $\frac{ا}{ب}$ من المرات .

(مثـال ١) أوجد مقادير السرع الآتية بدلالة السنتيمتر والثانية :

(أولا) ٣٠ مترا فى الساعة

(ثانيـا) ١٥ ديسيمترا فى الدقيقة

(ثالثـا) ا من السنتيمترات فى ب من الأيام (اليوم ٢٤ ساعة)

(أولا) من حيث ان المتر = ١٠٠ سنتيمتر

تكون سرعة ٣٠ مترا فى الساعة

= سرعة ٣٠ × ١٠٠ من السنتيمترات فى ٦٠ × ٦٠ من الثوانى

= سرعة $\frac{٣٠ \times ١٠٠}{٦٠ \times ٦٠}$ من السنتيمترات فى الثانية

= سرعة $\frac{٥}{٦}$ من السنتيمتر فى الثانية

(ثانيا) من حيث ان الديسيمتر = ١٠ سنتيمترات

فسرعة ١٥ ديسيمترا فى الدقيقة

= سرعة ١٥ × ١٠ من السنتيمترات فى ٦٠ ثانية

= سرعة $\frac{١٥ \times ١٠}{٦٠}$ من السنتيمترات فى الثانية

= سرعة $٢\frac{١}{٢}$ من السنتيمترات فى الثانية

(ثالثا) سرعة ا من السنتيمترات فى ب من الأيام

= سرعة ا من السنتيمترات فى ب × ٢٤ × ٦٠ × ٦٠ من الثوانى

= سرعة $\frac{ا}{٨٦٤٠٠\,ب}$ من السنتيمترات فى الثانية

(تمارين ١)

(١) مامقدار كل من السرع الآتية عند مايكون السنتيمتر وحدة الطول والثانية وحدة الزمن

(أولا) ٣ أمتار فى الثانية

(ثانيا) $\frac{١}{٢}$ ١٨ من الديسيمترات فى الدقيقة

(ثالثا) ٤٠٠ سنتيمتر فى الساعة

(رابعا) ٣ ديسيمترات فى الساعة

(خامسا) ا من السنتيمترات فى ب من الثوانى

(سادسا) ا من الأمتار فى ب من الساعات

(سابعا) $(ا - ب)^{٢}$ من الديسيمترات فى $(ا^{٢} - ب^{٢})$ من الدقائق .

(٢) ما أكبر السرع الآتية

(أولا) ٩٥٠ سنتيمترا فى الدقيقة

(ثانيا) $\frac{٢}{٣}$ ١ من الديسيمترات فى الثانية

(ثالثا) ٥٨٠ مترا فى الساعة

(٣) ما أكبر السرع الآتيـــة

(أولا) ١٧٤٠ ياردة فى الدقيقة

(ثانيا) ٨٦ قدما فى الثانيـــة

(ثالثا) ٥٩ ميلا فى الساعة

(٤) سرعة معلومة قدرها ١٠ عندما تكون القدم ، الثانية وحدتى الطول والزمن فـا مقدار هذه السرعة عند ما تكون وحدتا الطول والزمن

(أولا) الياردة والثانيـــة

(ثانيا) الياردة والدقيقـــة

(ثالثا) البوصـــة والسنة (السنة ٣٦٥ يوما)

(رابعـا) ٩٣ مليونا من الأميال ، ١٧ دقيقة

(٥) يتحرك جسمان بسرعتين منتظمتين وأحدهمـا يقطع ٣٦ ميلا فى ٢٠ دقيقة والآخر ٥٥ قدما فى $\frac{١}{٤}$ ١ من الثوانى : قارن بين سرعتيهما

(٦) سرعة معلومة قدرها ع عند ما تكون وحدتا الطول والزمن الميل والساعة فـا قدر هـذه السرعة عند ما تكون هاتان الوحدتان : (أولا) القدم والثانية (ثانيا) الياردة والدقيقة

بند ١٢ — السـرعة المتغـيرة .

يقال ان الجسم يتحرك بسرعة متغـيرة إذا لم يقطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية وإذا تحرك جسم بسرعة متغيرة فان سرعته فى لحظة معلومة تقدّر بعـدد وحدات الطول التى يقطعها الجسم فى وحدة الزمن لو استمرت سرعته التى تحرك بهـا فى تلك اللحظة مدّة

وحدة الزمن . فمثلا اذا قلنا ان باخرة تسير فى لحظة معلومة بسرعة ٨ عقدات فى الساعة لا نعنى بذلك أنها تقطع ٨ عقدات فى الساعة التالية لأن السرعة قد تزيد أو تنقص أثناء الساعة بل نعنى أنه لو استمرت الباخرة على سرعتها الحالية لقطعت ٨ عقدات فى الساعة التالية .

ويلاحظ الطالب أن سرعة الجسم خاصة بحركته فى لحظة معلومة .

بند ١٣ — إيجاد المسافة التى يقطعها جسم متحرك بسرعة منتظمة فى زمن معين .

اذا تحرك جسم بالسرعة ع فقطع ف من وحدات المسافة فى د من وحدات الزمن فان ف = ع د وذلك لأن الجسم فى وحدة الزمن يقطع ع من وحدات المسافة وفى وحدتين من الزمن يقطع ٢ ع من وحدات المسافة وفى ثلاث وحدات من الزمن يقطع ٣ ع من وحدات المسافة وهكذا . ففى الزمن د أى فى وحدات من الزمن عددها د يقطع الجسم ع د من وحدات المسافة . فلو رمزنا الى المسافة التى يقطعها فى ذلك الزمن بالرمز ف يكون

ف = ع د

وفى استعمال هذا القانون يجب على الطالب أن يراعى أن تكون وحدات الزمن من نوع واحد وكذا وحدات المسافة .

(مثال ١) قطار يسير بسرعة ٢٠ مترا فى الثانية فما المسافة التى يقطعها فى $\frac{1}{2}$ ١ من الساعات ؟

نأخذ المتر والثانية وحدتين للمسافة والزمن فتكون ع = ٢٠

ثم أن الزمن = $\frac{1}{2}$ ١ من الساعات = ٩٠ دقيقة = ٥٤٠٠ ثانية وحينئذ د = ٥٤٠٠ فالمسافة التى يقطعها ف = ع د

= ٢٠ × ٥٤٠٠ من الأمتار

= ١٠٨ كيلو مترات

(مثال ٢) تتحرك نقطة بسرعة ١٥٠ ياردة فى الدقيقة فما الزمن الذى تستغرقه أثناء تحركها مسافة ١٠ أميال ؟

تأخذ الياردة وحدة للمسافة والدقيقة وحدة للزمن

فتكون ع = ١٥٠ ، ف = ١٠ × ١٧٦٠

∴ ١٠ × ١٧٦٠ = ١٥٠ × د

ومنه د = $\frac{١٧٦٠ \times ١٠}{١٥٠}$

= ١١٧ $\frac{١}{٣}$ من الدقائق

(تمارين ٢)

(١) يتحرك جسم بسرعة منتظمة قدرها ١٠ أمتار فى الثانية فما المسافة التى يقطعها

(اولا) فى $\frac{١}{٤}$ ٣ من الساعات

(ثانيا) فى $\frac{١}{٣}$ اليوم

(ثالثا) فى ١٢ ساعة ، ٤ دقائق ، ٥ ثوان

(٢) يتحرك جسم بسرعة منتظمة قدرها ١٥ مترا فى الساعة فما الزمن الذى يقطع فيه .

(أولا) كيلو مترا واحدا

(ثانيا) ٣٥٠ مترا

(٣) تطير حمامة ١٠٠ كيلومتر فى ١٢٠ دقيقة فما الزمن الذى تطير فيه ١٤٥٠ مترا ؟

(٤) أوجد سرعة الأرض فى مدارها حول الشمس مع العلم أنه دائرة نصف قطرها ١٥٠ مليونا من الكيلو مترات تقطعها الأرض بسرعة منتظمة فى $\frac{١}{٤}$ ٣٦٥ من الأيام (أذكر الجواب مقدرا بالأمتار والثوانى) .

(٥) تقطع باخرة عقدة واحدة فى $\frac{١}{٢}$ ٤ من الدقائق فما الزمن الذى تقطع فيه ١٠٠ ميل ؟ [العقدة = ٦٠٨٠ قدما] .

(٦) قطار طوله ١٢٠ ياردة يجتاز جسرا طوله ٨٠ قدما بسرعة ٣٠ ميلا فى الساعة فما الزمن اللازم لاجتيازه الجسر بتمامه ؟

(٧) ما الزمن الذى يسير فيه قطار من الأرض الى الشمس أى ٩٣ مليونا من الأميال اذا سار بسرعة ميل واحد فى الدقيقة ؟ (قدّر النتيجة بالسنين) .

بند ١٤ — السرعة المتوسطة .

اذا قطع جسم مسافة معلومة بسرعة متغيرة فان السرعة المنتظمة التى بها يقطع تلك المسافة فى نفس الزمن الذى استغرقه أولا تسمى سرعته المتوسطة أثناء قطعه المسافة المعينة فمثلا السرعة المتوسطة لقطار يقطع المسافة بين القاهرة والاسكندرية وهى ٢١٠ كيلومترات فى ٣ ساعات عبارة عن السرعة المنتظمة التى بها يقطع القطار ٢١٠ كيلومترات فى ٣ ساعات وهى تساوى ٧٠ كيلومترا فى الساعة .

وينطبق القانون المذكور بالبند السابق على السرعة المتوسطة .

(مثال) قطعت باخرة مسافة ٢٥٧ عقدة بين الساعة ٧ والدقيقة ١٩ مساء من ١٨ أكتوبر والساعة ١٢ ظهرا من ١٩ أكتوبر فما سرعتها المتوسطة مقدرة بالأقدام فى الثانية ؟ [العقدة = ٦٠٨٠ قدما]

الزمن فى هذه المسألة هو ١٦ ساعة ، ٤١ دقيقة أى ٦٠٠٦٠ ثانية والمسافة ٢٥٧ عقدة أى ٢٥٧ × ٦٠٨٠ من الأقدام فمن القانون تكون السرعة المتوسطة

$$ع = \frac{٢٥٧ \times ٦٠٨٠}{٦٠٠٦٠} = ٢٦ \frac{٥٠}{٣٠٠٣}$$ من الأقدام فى الثانية .

(تمارين ٣)

(١) قطار سريع يقطع المسافة بين القاهرة وطنطا وهى ٨٧ كيلومترا فى ٧٥ دقيقة ما سرعته المتوسطة مقدرة بالأمتار فى الثانية ؟

(٢) قطعت باخرة ٣٧٠ كيلومترا ، ٣٨٩ كيلومترا ، ٣٧٣ كيلومترا فى ثلاثة أيام متتالية ما سرعتها المتوسطة فى هذه الأيام الثلاثة مقدرة بالأمتار فى الدقيقة ؟

(٣) ما السرعة المتوسطة لرجل يجرى ميلا واحدا فى ٦ دقائق وآخر فى ٧ دقائق وثالثا فى ٨ دقائق ورابعا فى ٩ دقائق ؟

(٤) قطار سريع يقطع مسافة ١٠٠ ميل فى ساعتين ، ٣٥ دقيقة ما سرعته المتوسطة مقدرة بالأقدام فى الثانية ؟

(٥) سارت باخرة من سندى هوك الى بليموث أى مسافة ٢٩٥١ عقدة فى ٧ أيام ، ١٧ ساعة ، ٥ دقائق ما سرعتها المتوسطة مقدرة بالعقدة فى الساعة ؟

بند ١٥ — تمثيل السرع بالرسم البيانى .

تتعين السرعة تعينا تاما اذا علم مقدارها واتجاهها . ومن حيث ان المستقيمات تتعين بهذين الشيئين فيمكن الدلالة على السرعة رسما بخط مستقيم . ولتمثيل السرعة بمستقيم نرسم فى اتجاه السرعة مستقيما ثم نقطع منه جزءا يحتوى على عدد من وحدات الطول يساوى عدد وحدات السرعة المعلومة . ويمكن تمثيل وحدة السرعة بأى طول اختيارى . غير أنه يجب أن تبقى وحدة الطول المختارة ثابتة عند تمثيل سرعتين أو أكثر بالرسم .

فمثلا اذا مثلنا سرعة متر فى الثانية بمستقيم طوله سنتيمتر وجب أن نمثل سرعة ١٠ أمتار فى الثانية بمستقيم طوله ١٠ سنتيمترات وسرعة ع من الأمتار فى الثانية بمستقيم طوله ع من السنتيمترات وهكذا .

بند ١٦ — تركيب السرع .

رأينا أن الجسم المتحرك يكون له فى كل نقطة من مساره سرعة معينة فى اتجاه معين وهناك أحوال فيها تكون سرعة الجسم المتحرك مركبة من سرعتين أو أكثر .

(مثال ذلك) حركة رجل يمشى على ظهر باخرة جائزا عرضها وهى سائرة الى الأمام .

فمن الواضح أن تحرك الرجل فى الفراغ يتوقف على الحركة الأصلية التى يجتاز بها عرض الباخرة وعلى حركة الباخرة الى الأمام. فالسرعة الحقيقية للرجل فى الفراغ تتركب من سرعتين أولاهما سرعته الأصلية بالنسبة للباخرة والثانية سرعة الباخرة على الماء. وعند ما تكون سرعة الجسم الحقيقية مركبة من سرعتين أو أكثر كما فى هذا المثال تسمى كل من تلك السرع بالسرعة المركبة وتسمى السرعة الحقيقية بالسرعة المحصلة .

بند ١٧ — محصلة سرعتين أو أكثر فى مستقيم واحد .

غنى عن البيان أنه اذا كان لجسم سرعتان فى مستقيم واحد وكانتا متحدتى الاتجاه فان السرعة المحصلة تكون سرعة فى المستقيم عينه وفى نفس الاتجاه . ومقدارها يساوى مجموع مقدارى السرعتين المركبتين . فمثلا اذا أطلقت قنبلة من بارجة الى الأمام أثناء

سيرها فسرعة القنبلة مساوية لمجموع سرعة البارجة والسرعة الناشئة من فرقعة المدفع فاذا رمزنا بالرمزين ع$_1$ ، ع$_2$ الى السرعتين المركبتين المتحدتى الاتجاه وبالرمز ع الى السرعة المحصلة .

فان
$$ع = ع_1 + ع_2$$

كذلك تكون محصلة سرعتين فى مستقيم واحد متضادتى الاتجاه مساوية الفرق بين السرعتين المركبتين . ففى المثال الآنف الذكر اذا أطلقت القنبلة من مؤخر البارجة فالسرعة الحقيقية للقنبلة مساوية الفرق بين السرعة الناشئة من فرقعة المدفع وسرعة البارجة على الماء .

فباستعمال الرموز السابقة يكون فى هذه الحالة .

$$ع = ع_1 \sim ع_2$$

واذا اعتبرنا السرعة موجبة فى اتجاه وسالبة فى الاتجاه المضاد تنتج قاعدة بسيطة لايجاد محصلة أى عدد من السرع المركبة التى فى مستقيم واحد .

وذلك بأن نعتبر أحد الاتجاهين موجبا فتكون كل المركبات التى فى ذلك الاتجاه كميات موجبة . والتى فى الاتجاه المضاد كميات سالبة ويكون حينئذ مقدار السرعة المحصلة هو المجموع الجبرى للمركبات . واتجاه المحصلة يكون موجبا أوسالبا على حسب كون ذلك المجموع الجبرى موجبا أو سالبا .

(مثال) باخرة تقطع ١٢ عقدة فى الساعة على الماء الراكد فما سرعتها فى الماء الجارى الذى سرعة تياره $\frac{1}{4}$ ٢ من العقد فى الساعة ؟

(أولا) اذا سارت فى اتجاه التيار ،

(ثانيا) اذا صارت ضد التيار ،

السرعة فى اتجاه التيار = ١٢ + $\frac{1}{4}$ ٢

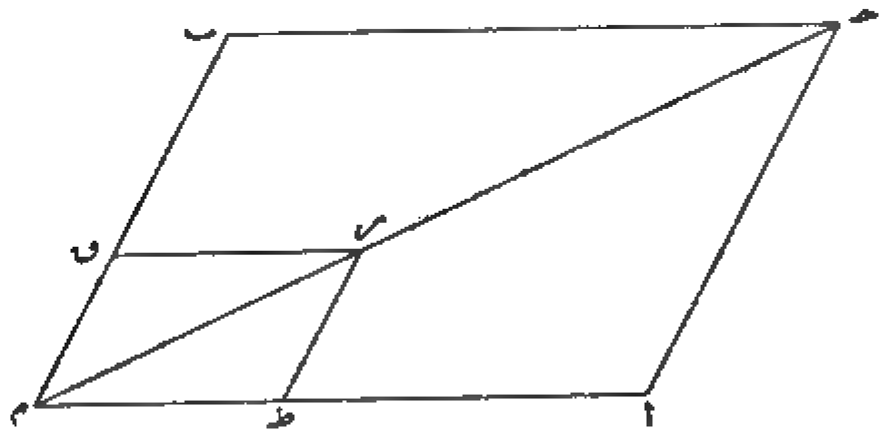
= $\frac{1}{4}$ ١٤ من العقد فى الساعة ،

السرعة ضد اتجاه التيار = ١٢ − $\frac{1}{4}$ ٢

= $\frac{3}{4}$ ٩ من العقد فى الساعة ،

بند ١٨ — متوازى الأضلاع للسرع .

اذا كان لجسم سرعتان ليستا فى مستقيم واحد فانه يمكن ايجاد محصلتهما بالعمل المبين فى النظرية الآتية المعروفة بمتوازى الأضلاع للسرع وهى :



اذا كان لجسم سرعتان يمثلهما فى المقدار والاتجاه المستقيمان م ا ، م ب وقد أكمل متوازى الأضلاع م ا حـ ب فان السرعة المحصلة تمثل فى المقدار والاتجاه بالقطر م حـ الذى يمر بالنقطة م .

نرى من بند ١٥ أن م ا ، م ب يمثلان على التناظر المسافتين اللتين يقطعهما الجسم بسرعتيه المركبتين فى وحدة الزمن ولنفرض أنها الثانية ففى الثانية الواحدة يقطع الجسم باحدى السرعتين المسافة التى يمثلها م ا وبالسرعة الأخرى المسافة التى يمثلها م ب .

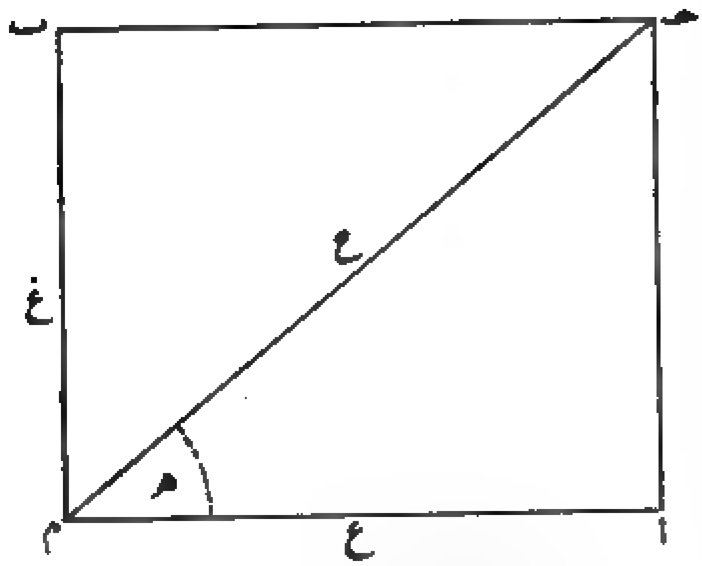
وينتج من ذلك أن الوضع الذى يأخذه الجسم بعد مضى ثانية هو نفس الوضع الذى يأخذه لو حُرّك المسافة م ا بينما المستقيم م ا ينقل مسافة تساوى وتوازى م ب .

ومن حيث ان ا حـ يساوى م ب ويوازيه يكون الجسم قد وصل فى آخر الثانية الى حـ . وكذلك اذا مثل المستقيمان م ط ، م و المسافتين اللتين يقطعهما الجسم بالسرعتين المعلومتين فى جزء ما من الثانية فمن الواضح أن نسبة م ط الى م ا تساوى نسبة م و الى م ب . فاذا أكمل متوازى الأضلاع م ط ر و يكون مشابها لمتوازى الأضلاع م ا حـ ب فتقع ر على م حـ وتكون نسبة م ر الى م حـ كنسبة م ط الى م ا كنسبة م و الى م ب فالجسم يتحرك فى المستقيم م حـ .

ومن حيث ان الجسم يكون فى الوضع حـ عند انتهاء الثانية ومن حيث انه يتحرك فى المستقيم م حـ ينتج أن م حـ يمثل المسافة الحقيقية التى قطعها الجسم فى الثانية ومن حيث ان نسبة المسافة م ر المقطوعة فى أى جزء معلوم من الثانية الى المسافة م حـ تساوى نسبة م ط الى م ا ينتج أن الحركة فى المستقيم م حـ منتظمة .

اذن يمثل م حـ السرعة المحصلة بنفس الوحدات التى بها يمثل م ا ، م ب السرعتين المركبتين .

بند ١٩ – محصلة سرعتين الزاوية بينهما قائمة .



نفرض أن ع ، غ هما السرعتان المركبتان اللتان إحداهما عمودية على الأخرى . ويُمَثِّلُ المستقيمان المتعامدان م ا ، م ب هاتين السرعتين . فبمقتضى متوازى الأضلاع للسرع تُمَثَّلُ السرعة المحصلة فى المقدار والاتجاه بالقطر م حـ من المستطيل م ا حـ ب .

فاذا رمزنا الى السرعة المحصلة بالرمز ح وللزاوية التى تكونها المحصلة مع السرعة ع بالرمز هـ كانت المستقيمات الثلاثة م ا ، ا حـ (الذى يساوى م ب) ، م حـ متناسبة مع ع ، غ ، ح . ولكن

$$\overline{م حـ}^{٢} = \overline{م ا}^{٢} + \overline{ا حـ}^{٢}$$

$$\therefore \quad ح^{٢} = ع^{٢} + غ^{٢}$$

وبأخذ الجذر يكون $ح = \sqrt{ع^{٢} + غ^{٢}}$ ... ... (١)

وأيضاً $ظا \ ا م حـ = \frac{ا حـ}{م ا}$

$$= \frac{م ب}{م ا}$$

وحينئذ $ظا \ هـ = \frac{غ}{ع}$ ... ... (٢)

وتعين النتيجتان (١) ، (٢) السرعة المحصلة تعيينا تاما .

(مثال) ما السرعة المحصلة لجسم له سرعتان إحداهما ٦ كيلومترات فى الساعة شرقا والأخرى ١٢ كيلومترا فى الساعة شمالا .

هنا ع = ٦ ، غ = ١٢ وحينئذ توجد المحصلة من القانون

$$ح^٢ = ع^٢ + غ^٢$$

$$= ٣٦ + ١٤٤$$

$$= ١٨٠$$

ومن ذلك $ح = \sqrt{١٨٠}$

= ١٣,٤٢ من الكيلومترات فى الساعة تقريبا .

واذا رمزنا بالرمز هـ الى الزاوية التى تصنعها السرعة مع خط الشرق يكون

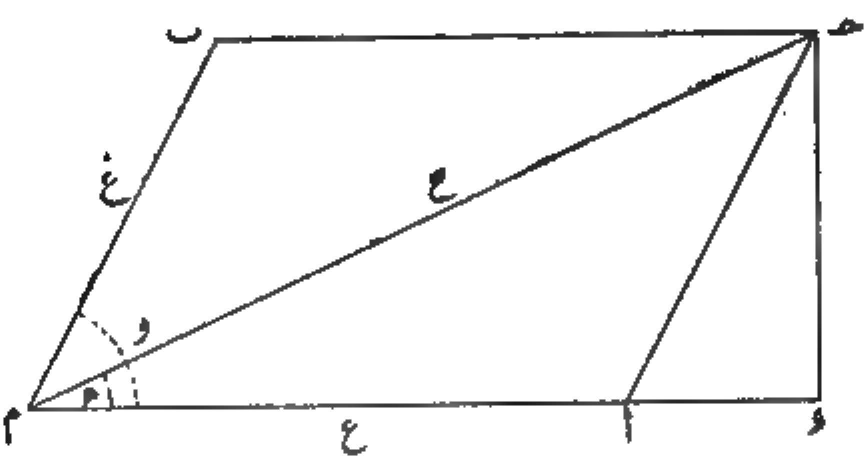
$$ظا هـ = \frac{غ}{ع} = \frac{١٢}{٦} = ٢$$

ومن جداول الظلال نجد أن الزاوية التى يساوى ظلها ٢ هى ٢٦َ ٦٣°

إذن هذه هى الزاوية التى تصنعها السرعة المحصلة مع خط الشرق .

بند ٢٠ — محصلة سرعتين تميل إحداهما على الأخرى بأية زاوية معلومة .

لتكن ع ، غ السرعتين المركبتين ، و الزاوية بينهما ، ح السرعة المحصلة ، هـ الزاوية التى تصنعها المحصلة مع السرعة ع .



وليمثل المستقيمان م ا ، م ب السرعتين المركبتين ع ، غ .

فتكون المحصلة ح ممثلة بالمستقيم م حـ وهو قطر متوازى الأضلاع الذى ضلعاه المتجاوران م ا ، م ب .

فمن حيث ان ا حـ = م ب والزاوية م ا حـ = ١٨٠° — و ينتج من حساب المثلثات أن

$$\overline{\text{م حـ}}^{\,٢} = \overline{\text{م ا}}^{\,٢} + \overline{\text{ا حـ}}^{\,٢} - ٢\ \text{م ا} \times \text{ا حـ جتا م ا حـ}$$

$$= \overline{\text{م ا}}^{\,٢} + \overline{\text{م ب}}^{\,٢} - ٢\ \text{م ا} \times \text{م ب جتا} (١٨٠^\circ - \text{و})$$

$$= \overline{\text{م ا}}^{\,٢} + \overline{\text{م ب}}^{\,٢} + ٢\ \text{م ا} \times \text{م ب جتا و}$$

ولكن م ا ، م ب ، م حـ متناسبة مع ع ، غ ، ح على التناظر

اذن $\text{ح}^٢ = \text{ع}^٢ + \text{غ}^٢ + ٢\ \text{ع غ جتا و}$

$$\text{، ح} = \sqrt{\text{ع}^٢ + \text{غ}^٢ + ٢\ \text{ع غ جتا و}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١)$$

واذا رسمنا حـ ى عمودا على م ا (أو امتداده)

يكون ا حـ = م ب والزاوية حـ ا ى = الزاوية ا م ب = و

$$\text{، م ى} = \text{م ا} + \text{ا ى} = \text{م ا} + \text{ا حـ جتا و}$$

$$= \text{م ا} + \text{م ب جتا و}$$

$$\text{، حـ ى} = \text{ا حـ جا ى ا حـ} = \text{م ب جا و}$$

$$\text{فيكون ظا هـ} = \text{ظا ا م حـ} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{م ى}} = \frac{\text{م ب جا و}}{\text{م ا} + \text{م ب جتا و}}$$

$$= \frac{\text{غ جا و}}{\text{ع} + \text{غ جتا و}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢)$$

ويعين القانونان (١) ، (٢) السرعة المحصلة تعيينا تاما .

واذا كانت و = ٩٠° يكون جا و = ١ ، جتا و = صفرا فيصير القانونان كالمذكورين بالبند السابق .

(مثال) جسم له سرعتان مركبتان احداهما ٤ والأخرى ١٠ والزاوية بينهما ٦٠° فما مقدار السرعة المحصلة واتجاهها ؟

هنا $ع = ٤ ،\ غ = ١٠ ،\ و = ٦٠^\circ$

$\therefore\ ح = \sqrt{١٦ + ١٠٠ + ٢ \times ٤ \times ١٠ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt{١٥٦}$

$= ١٢,٤٩$

، $ظا\ هـ = \frac{١٠\ جا\ ٦٠^\circ}{٤ + ١٠\ جتا\ ٦٠^\circ} = \frac{١٠ \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٤ + ١٠ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٩}$

$= ٠,٩٦٢ = ظا\ ٥٤' \ ٤٣^\circ$

فيكون مقدار المحصلة ١٢,٤٩ ، واتجاهها يصنع زاوية قدرها ٥٤′ ٤٣° مع السرعة المركبة الصغرى .

(تمارين ٤)

(١) أوجد محصلة السرعتين المذكورتين فى كل من الأحوال الآتية والزاوية المحصورة بين المحصلة والمركبة الصغرى :

(أولا) ٥ ، ١٢ بينهما قائمة

(ثانيا) ٨ ، ١٥ بينهما قائمة

(ثالثا) $٥\sqrt{٣}$ ، ٥ بينهما قائمة

(رابعا) ٩٩ ، ٢٠ بينهما قائمة

(خامسا) $٤\sqrt{٣}$ ، ١٢ بينهما قائمة

(سادسا) ٧ ، ٨ بينهما ٣٠°

(سابعا) ٢١ ، ٢٤ بينهما ٦٠°

(ثامنا) ١٥ ، $١٨\sqrt{٢}$ بينهما ٤٥°

(٢) أوجد مقدار محصلة السرعتين المركبتين فى كل من الأحوال الآتية :

(أولا) $ا + ب$ ، $ا - ب$ بينهما قائمة .

(ثانيا) $(م + د)^٢ + ٢(م + د)$ ، $٢(م + د + ١)$ بينهما قائمة .

(ثالثا) $م + د\sqrt{٣}$ ، $م - د\sqrt{٣}$ بينهما قائمة .

(رابعا) $م\sqrt{٢} + د\sqrt{٣}$ ، $م\sqrt{٢} - د\sqrt{٣}$ بينهما قائمة .

(خامسا) $١ + م\sqrt{٢}$ ، $١ - م\sqrt{٢}$ بينهما ١٢٠° .

(٣) ما مقدار السرعة الحقيقية واتجاهها لسفينة تحاول السير جهة الشرق بسرعة ٣ كيلومترات فى الساعة حينما يحملها تيار متجه جهة الجنوب سرعته كيلومتران فى الساعة ؟

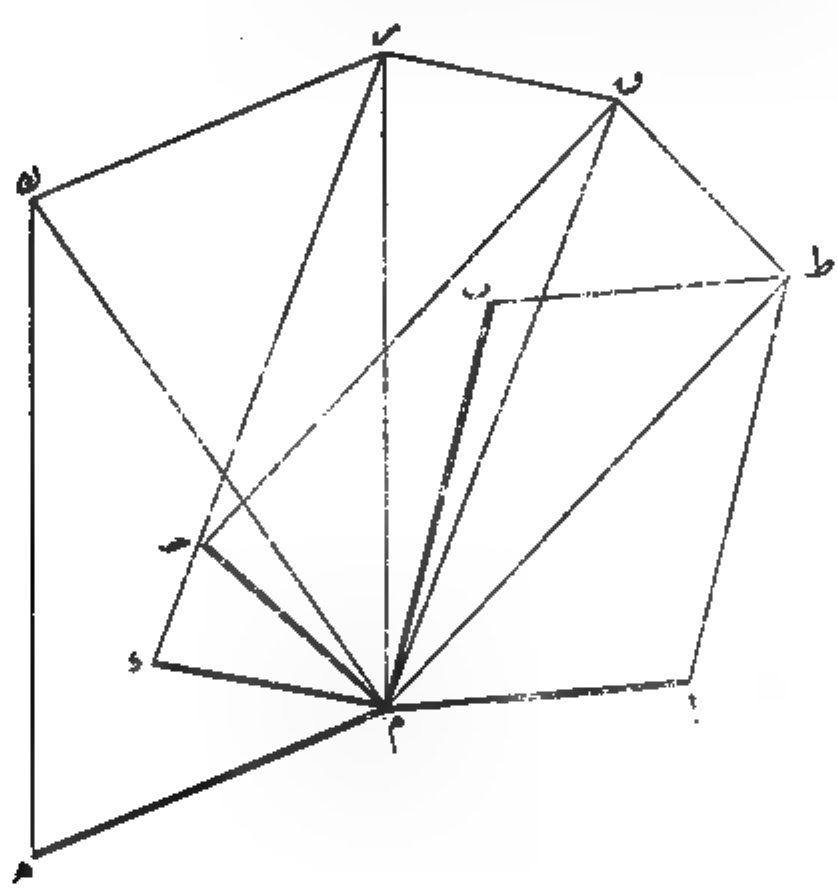
(٤) ما السرعة الحقيقية لحبة رمل نازلة فى الماء بسرعة ٦ أقدام فى الثانية حينما يحملها التيار فى جهة أفقية بسرعة $١\frac{١}{٢}$ من الأقدام فى الثانية ؟

(٥) بارجة سائرة بسرعة ١٥ عقدة فى الساعة أطلقت منها قنبلة بسرعة ١٠٠٠ قدم فى الثانية فى اتجاه يكون زاوية مقدارها ٦٠° مع اتجاه سير البارجة. ما السرعة الحقيقية للقنبلة بالأقدام فى الثانية ؟ [العقدة = ٦٠٨٠ قدما] .

بند ٢١ — إيجاد محصلة أى عدد من السرع المركبة بطريق الرسم .

يمكن ايجاد محصلة أى عدد من السرع المركبة رسما بتكرار تطبيق متوازى الأضلاع للسرع .

نفرض خمس سرعات مركبة تمثلها المستقيمات م ا ، م ب ، م حـ ، م ء ، م هـ فبمقتضى متوازى الأضلاع للسرع تكون المحصلة للسرعتين م ا ، م ب سرعة يمثلها القطر م ط من متوازى الأضلاع الذى ضلعاه المتجاوران م ا ، م ب .



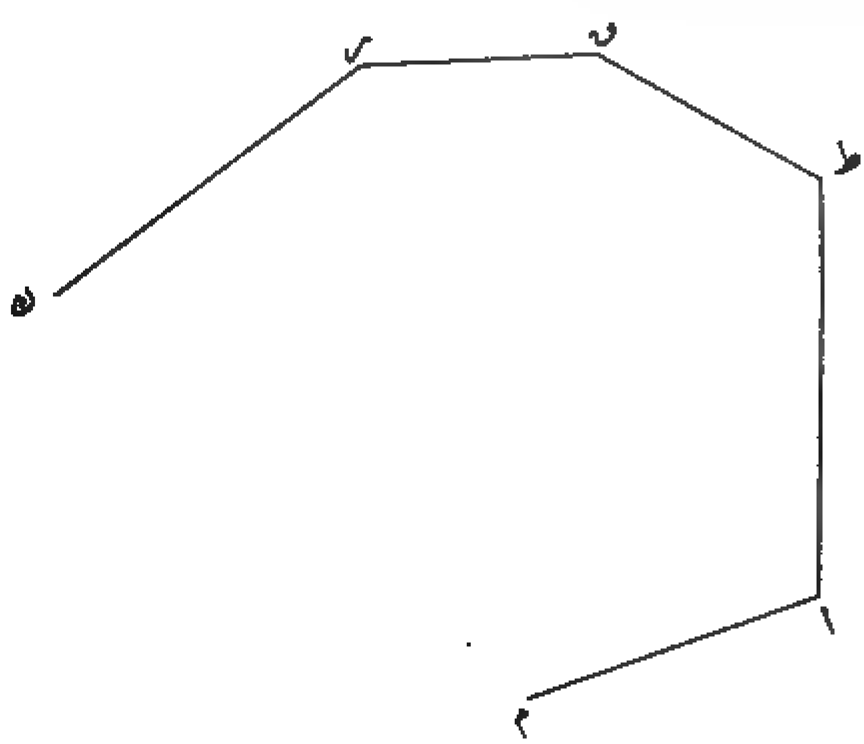
نستعيض عن السرعتين م ا ، م ب محصلتهما م ط وتركب هذه مع السرعة م حـ فتكون المحصلة سرعة يمثلها م ى وهذه حينئذ مكافئة السرع الثلاث م ا ، م ب ، م حـ .

ثم تركب السرعة م ى مع السرعة م ء فتكون المحصلة سرعة يمثلها م ر .
ولو ركبنا هذه مع السرعة م هـ نحصل على السرعة التي يمثلها م ك . اذن م ك يمثل السرعة المحصلة للسرع الخمس م ا ، م ب ، م حـ ، م ء ، م هـ .

ومن حيث ان ا ط يساوى م ب ويوازيه ، ط ى يساوى م حـ ويوازيه ، ى ر يساوى م ء ويوازيه ، ر ك يساوى م هـ ويوازيه فمن الواضح أنه يمكن أن يستعاض عن العملية السابقة عملية أبسط منها نبينها فيما يأتى :

نرسم م ا ومن ا نرسم ا ط مساويا وموازيا م ب ثم من ط نرسم ط ى مساويا وموازيا م حـ ثم من ى نرسم ى ر مساويا وموازيا م ء ثم من ر نرسم ر ك مساويا وموازيا م هـ .

فتكون السرعة المحصلة للسرع الخمس سرعة يمثلها المستقيم الواصل بين النقطة م والنقطة ك التي حصلنا عليها بهذه الطريقة .



وعلى هذا النحو يمكن ايجاد المحصلة لأى عدد من السرع .

وواضح أنه اذا انطبقت ك على م تكون المحصلة صفرا . ومن ذلك نستنتج النظرية الآتية المعروفة بمضلع السرع .

مضلع السرع — اذا كان لجسم سرع مركبة يمثلها فى المقدار والاتجاه أضلاع مضلع مقفل مأخوذة على الترتيب فى اتجاه دائرى فان السرعة المحصلة تكون صفرا أى أن الجسم يكون ساكنا . وهناك حالة خاصة من مضلع السرع فيها يكون المضلع مثلثا وتعرف هذه الحالة بمثلث السرع .

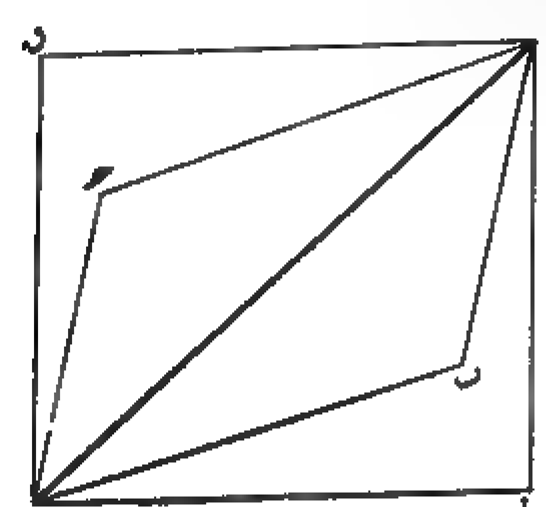
ويمكن ايجاد مقدار المحصلة واتجاهها لأى عدد من السرع بالجبر بتكرار تطبيق القانون المستنتج فى بند ٢٠ إلا أن هذه الطريقة تتطلب عملا كثيرا . وسنأتى على طريقة أبسط منها فى بند ٢٤

بند ٢٢ — تحليل السرعة .

اذا عُلمت سرعة فانه يمكننا إيجاد سرعتين تكافئهما السرعة المعلومة .

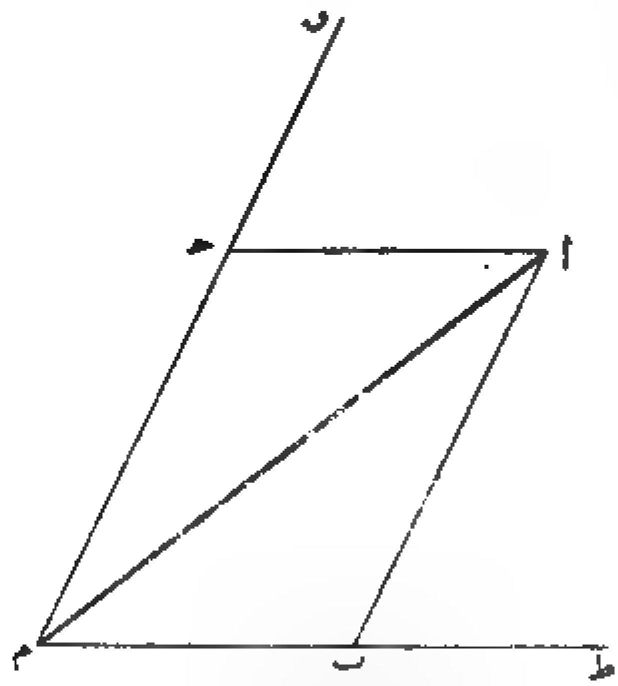
وهذه العملية التى تعرف بتحليل سرعة الى مركبتيها هى حينئذ عكس تركيب سرعتين لتكوين محصلة واحدة .

يمكننا تحليل سرعة الى مركبتين بطرق لانهاية لعددها لأننا لومثلنا السرعة بالمستقيم م ا يمكننا رسم عدد لانهاية له من متوازيات الأضلاع يكون م ا قطرا لكل منها كمتوازيي الأضلاع م ب ا حـ ، م ط ا ى فبمقتضى متوازى الأضلاع للسرع تكون السرعة م ا مكافئة السرعتين م ب ، م حـ وكذا تكافئ السرعتين م ط ، م ى . ويقال على العموم إنها تكافئ السرعتين اللتين يمثلهما ضلعا متوازى الأضلاع الذى قطره م ا .



بند ٢٣ — تحليل سرعة الى مركبتين فى اتجاهين معلومين .

نفرض أن م ا يمثل سرعة ما وأن م ط ، م ق الاتجاهان المعلومان .
والمطلوب تحليل السرعة المعلومة الى مركبتين على طول م ط ، م ق .
من ا نرسم ا ب ، ا حـ موازيين م ق ، م ط على التناظر .

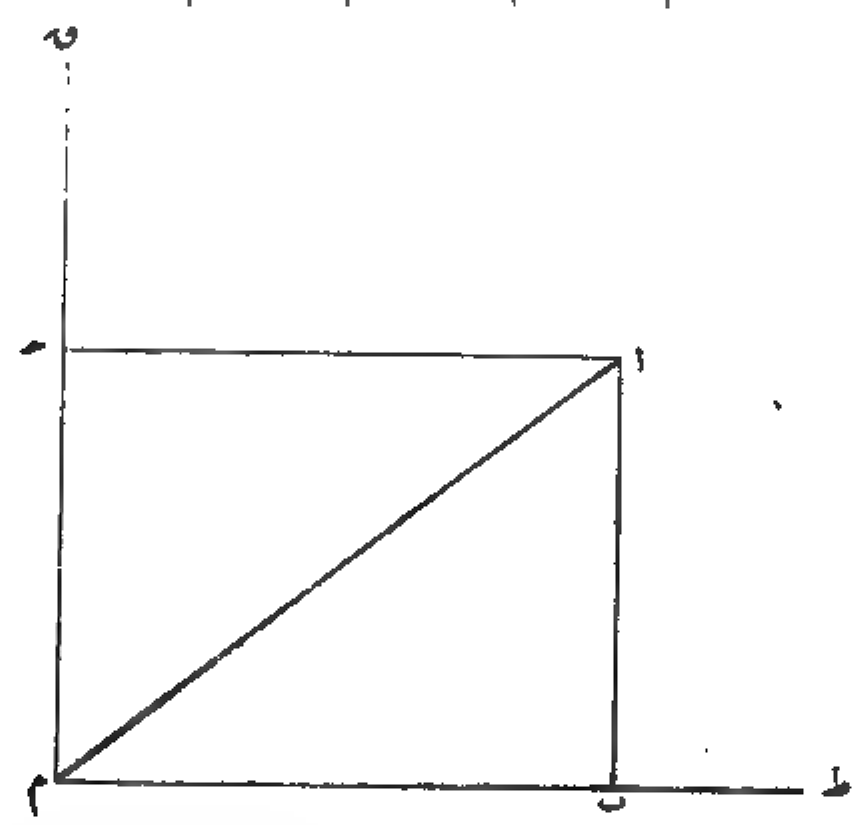


فبمقتضى متوازى الأضلاع للسرع تكون السرعة م ا مكافئة السرعتين م ب ، م حـ فالمركبتان فى الاتجاهين م ط ، م ق يمثلهما م ب ، م حـ على التناظر .

وأهم حالات تحليل سرعة هى الحالة التى فيها يكون الاتجاهان المعلومان متعامدين .

فاذا مثل المستقيم م ا سرعة ما فخان م ب ، م حـ يمثلان على التناظر المركبتين فى الاتجاهين م ط ، م ق المتعامدين

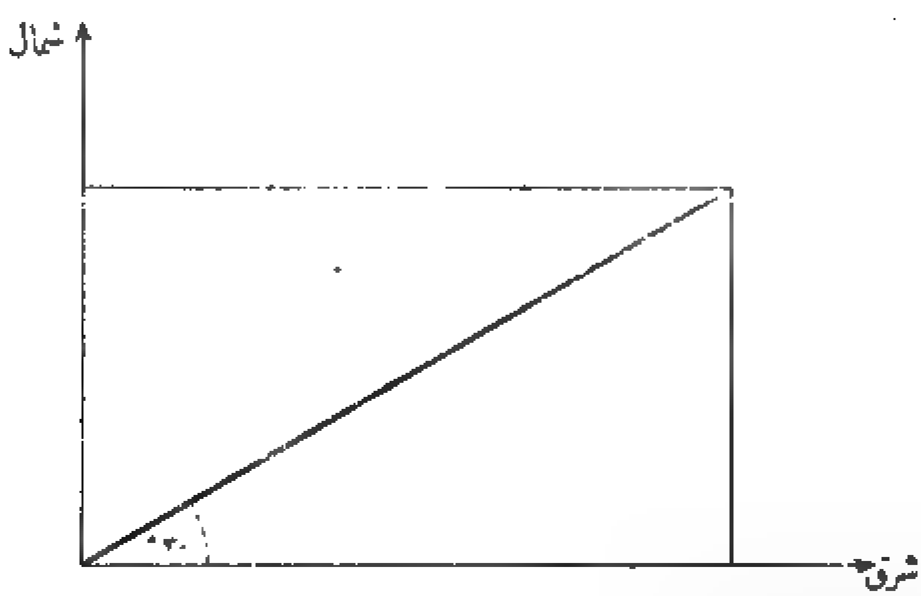
نرمز بالرمز ع الى مقياس السرعة م ا و بالرمز هـ الى الزاوية التى يصنعها م ا مع م ط
فمن حيث ان م ب = م ا جتا ا م ب = م ا جتا هـ
، م حـ = م ا جتا ا م حـ = م ا جا هـ



ينتج أن المركبة فى الاتجاه م ط تساوى ع جتا هـ .
والمركبة فى الاتجاه م ق تساوى ع جا هـ .
يتضح من هذا البند أنه يمكن تحليل سرعة الى مركبتين فى اتجاهين معلومين بطريقة واحدة لاغير .

وسنتكلم كثيرا على مركبة السرعة فى اتجاه معلوم ونعنى بذلك السرعة التى اذا ركبت مع المركبة التى يكون اتجاهها عموديا على الاتجاه المعلوم تحدث محصلة مساوية السرعة المعلومة . وقد رأينا أن المركبة فى اتجـاه معلوم تقدّر بضرب السرعة المعـلومة فى جيب تمـام الزاوية التى بين الاتجاه المعلوم واتجاه السرعة المعلومة . ففى الشكل السابق تقدّر المركبة فى الاتجاه م ط بضرب السرعة ع فى جيب تمام الزاوية أ م ط . وتقدّر المركبة فى الاتجاه م ق بضرب ع فى جيب الزاوية ا م ط أى فى جيب تمام الزاوية ا م ق .

(مثـال) قطار يســير بسرعة ٤٠ كيلومترا فى الساعة متجها شمـال الشرق بزاوية قدرها ٣٠° . فمـا سرعته شرقا وما سرعته شمـالا ؟



نحلل السرعة المعلومة الى مركبتين إحداهما شرقا والأخرى شمالا . فمن حيث ان اتجاه السرعة يصنع زاوية قدرها ٣٠° مع الاتجاه الشرق وزاوية قدرها ٦٠° مع الاتجاه الشمالى .

تكون المركبة فى الاتجاه الشرق = ٤٠ جتا ٣٠° = ٤٠ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

= ٣٤,٦٤ من الكيلومترات فى الساعة

والمركبـــة فى الاتجـاه الشمالى = ٤٠ × جتا ٦٠° = ٤٠ × $\frac{1}{2}$

= ٢٠ كيلومترا فى الساعة

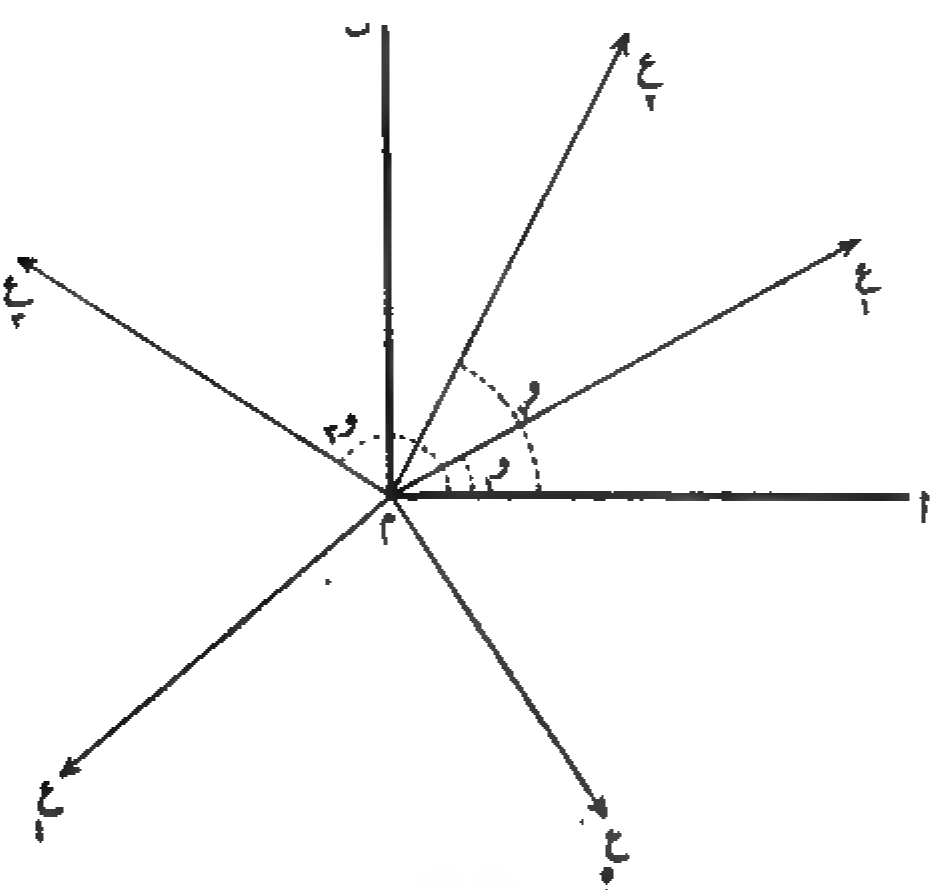
فالقطار يسير شرقا بسرعة ٣٤,٦٤ من الكيلومترات فى الساعة وشمالا بسرعة ٢٠ كيلومترا فى الساعة .

بند ٢٤ — إيجاد محصلة أى عدد من السرع بطريقة جبرية .

نفرض أن ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ ، . . . . أى عدد من السرع المركبة .

نأخذ أى مستقيمين متعامدين مثل م ا ، م ب ونفرض أن و$_1$ ، و$_2$ ، و$_3$ ، . . . . الزوايا التى تصنعها ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ ، . . . . على التناظر مع المستقيم م ا علما بأن كل هذه الزوايا مقيسة فى اتجاه واحد . ففى الشكل تكون الزاوية التى تصنعها ع$_4$ مع م ا هى الزاوية التى تقاس من م ا الى ع$_4$ فى اتجاه مضاد لاتجاه تحرك عقربى الساعة . وهى أكبر من قائمتين . وكذا الزاوية التى تصنعها ع$_5$ مع م ا فهى أكبر من ثلاث قوائم .

نحلل كلا من السرع ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ ، . . . . الى مركبتيها فى الاتجاهين م ا ، م ب فتكون مركبتا ع$_1$ هما ع$_1$ جتا و$_1$ فى الاتجاه م ا ، ع$_1$ جا و$_1$ فى الاتجاه م ب وكذا الحال فى مركبتى كل من ع$_2$ ، ع$_3$ ، . . . .



نوجد المجموعين الجبريين للمركبات التى فى الاتجاه م ا والمركبات التى فى الاتجاه م ب ويرمز اليهما بالرمزين س ، ص فيكون

$$س = ع_1 \, جتا \, و_1 + ع_2 \, جتا \, و_2 + ع_3 \, جتا \, و_3 + \ldots\ldots$$

$$ص = ع_1 \, جا \, و_1 + ع_2 \, جا \, و_2 + ع_3 \, جا \, و_3 + \ldots\ldots$$

فتكون مجموعة السرع المعلومة $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، .... مكافئة السرعتين س فى الاتجاه م ا ، ص فى الاتجاه م ب .

فاذا رمزنا بالرمز ح الى السرعة المحصلة و بالرمز هـ الى الزاوية التى تصنعها المحصلة مع م ا يكون بمقتضى بند (١٩)

$$ح = \sqrt{س^2 + ص^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

$$ظا \, هـ = \frac{س}{ص} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

ويعين القانونان (١) و (٢) مقدار السرعة المحصلة واتجاهها .

ويحسن غالبا أن نختار اتجاه إحدى السرع المعلومة اتجاها لأحد المستقيمين م ا ، م ب واذا كان من السرع اثنتان احداهما عمودية على الأخرى فواضح أن العمل يسهل بأخذ اتجاهيهما ليكونا اتجاهين للمستقيمين م ا ، م ب .

(مثال) تتحرك نقطة مادية بثلاث سرع فى آن واحد احداهما ٦٠ سنتيمترا فى الثانية شمالا والثانية ٨٨ سنتيمترا فى الثانية متجهة جنوب الغرب بزاوية قدرها ٣٠° . والثالثة ٦٠ سنتيمترا فى الثانية متجهة جنوب الشرق بزاوية قدرها ٣٠° فما مقدار السرعة المحصلة واتجاهها ؟

نحلل كلا من السرع شمالا وغربا .

(١) فالسرعة ٦٠ شمالا .

تكون مركبتها فى الاتجاه الشمالى = ٦٠ .

ومركبتها فى الاتجاه الغربى = صفرا .

(٢) والسرعة ٨٨ التى تتجه جنوب الغرب بزاوية قدرها $°٣٠$.

تكون مركبتهـا فى الاتجاه الشمالى = ٨٨ جتا ($°٩٠ + °٣٠$)

= ٨٨ جتا $°١٢٠$

= − ٤٤

ومركبتها فى الاتجاه الغربى = ٨٨ جتا $°٣٠$ = ٨٨ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٤٤ $\sqrt{٣}$

(٣) والسرعة ٦٠ التى تتجه جنوب الشرق بزاوية قدرها $°٣٠$.

تكون مركبتها فى الاتجاه الشمالى = ٦٠ جتا $°١٢٠$

= ٦٠ ($-\frac{١}{٢}$)

= − ٣٠

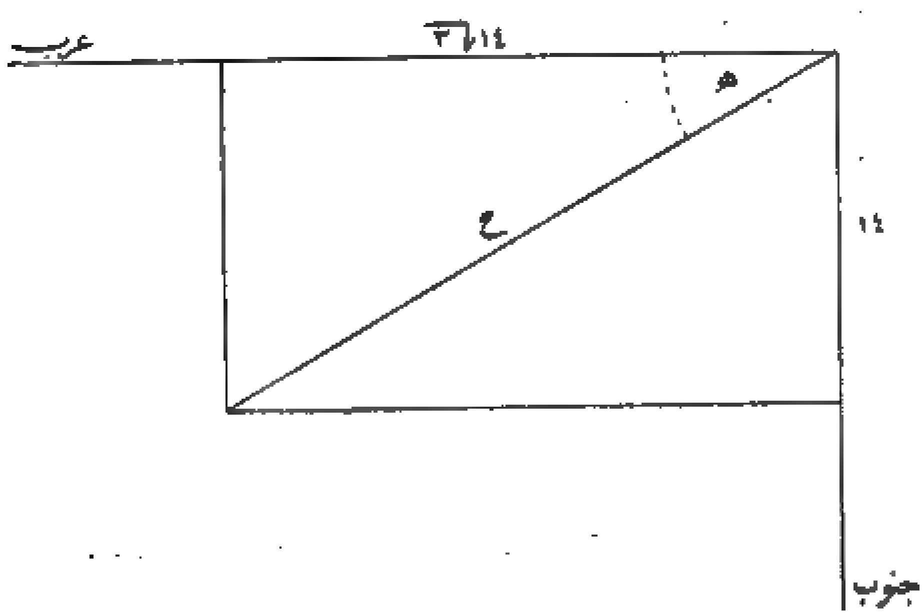
ومركبتها فى الاتجاه الغربى = ٦٠ جتا $°١٥٠$ = ٦٠ ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

= − ٣٠ $\sqrt{٣}$

فمجموع المركبات فى الاتجاه الشمالى = ٦٠ − ٤٤ − ٣٠

= − ١٤

ولكونه سالبا نعلم أن المركبة تتجه جنوبا .



ومجموع المركبات فى الاتجاه الغربى $= ٤٤ \sqrt{٣} - ٣٠ \sqrt{٣} = ١٤ \sqrt{٣}$

فالسرع الثلاث تكافئ السرعتين ١٤ جنوبا ، ١٤ $\sqrt{٣}$ غربا

فاذا رمزنا بالرمز ع الى المحصلة و بالرمز هـ الى الزاوية التى تصنعها مع الاتجاه الغربى

يكون $ع^٢ = ١٤^٢ + (١٤ \sqrt{٣})^٢$

ومنه $ع = ٢٨$

وأيضا $ظا هـ = \frac{١٤}{١٤\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ومنه $هـ = ٣٠^\circ$

فتكون المحصلة ٢٨ سنتيمترا فى الثانية متجهة جنوب الغرب بزاوية قدرها ٣٠°

(تمارين ٥)

[من المفيد أن يمرن الطالب نفسه على حل مسائل تركيب السرع وتحليلها بطريقة الرسم زيادة على الطريقة الجبرية . فليرسم السرع رسما نسبيا قاسا الزوايا بمنقلة حتى اذا قاس طول المستقيم الذى يدل على السرعة المطلوبة أمكنه إيجاد قيمة تقريبية لمقدار تلك السرعة] .

(١) حلل سرعة قدرها ١٠ الى مركبتين احداهما عمودية على الأخرى بحيث تكون الزاوية بين احداهما و بين اتجاه السرعة المعينة مساوية احد المقادير الآتية :

(أولا) ٣٠°
(ثانيا) ٤٥°
(ثالثا) ٦٠°
(رابعا) ١٢٠°
(خامسا) ١٥٠°

(٢) اذا حللت سرعة قدرها ٦ الى مركبتين احداهما عمودية على الأخرى واحداهما تساوى $٣ \sqrt{٣}$ فما مقدار الأخرى وما هما الزاويتان الواقعتان بين السرعة الأصلية ومركبتيها ؟

(٣) اذا حللت سرعة قدرها ع الى مركبتين احداهما عمودية على الأخرى وكانت احداهما كما هو مبين بعد فأوجد الأخرى والزاوية الواقعة بينها والسرعة الأصلية .

(١) ع $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٢) $\frac{ع}{٢}$ (٣) ع $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٤) يصعد قطار منحدرا ميله ١ فى ١٠٠ بسرعة ١٥ كيلومترا فى الساعة فما سرعته الأفقية وما سرعته الرأسية ؟

(٥) جسم له أربع سرع مركبة وهى ٦٠ سـ . م فى الثانية جهة الشرق ، ٧٠ سـ . م فى الثانية جهة الشمال ، ٨٠ سـ . م فى الثانية جهة الغرب ، ٩٠ سـ . م فى الثانية جهة الجنوب . أوجد مقدار السرعة المحصلة .

(٦) جسم له ٦ سرع مركبة وهى ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ بهذا الترتيب والزاوية بين كل متجاورتين ٦٠° . أوجد مقدار السرعة المحصلة واتجاهها .

(٧) جسم له ٣ سرع فى آن واحد وهى ٦٠ سـ . م فى الثانية شمال الشرق بمقدار ٣٠° ، ٧٠ سـ . م فى الثانية شمال الغرب بمقدار ٣٠° ، ٨٠ سـ . م فى الثانية جنوبا ما مقدار السرعة المحصلة ؟

(٨) سفينة تركها رجالها تندفع الى الشمال الشرق بسرعة ١٠ عقد فى اليوم . فاذا كانت العقدة تعادل ١ً من العرض فما الزمن الذى تنتقل فيه عشر درجات من العرض ؟

(٩) يتحرك قطاران على سكتين متوازيتين بسرعتى ٣٠ كيلومترا ، ٤٥ كيلومترا فى الساعة فاذا علم أن البعد بين السكتين صغير حتى يمكن اهماله وكانت المسافة بين القطارين فى لحظة ما هى ٥ كيلومترات فما البعد بينهما بعد مضى ٦ دقائق من تلك اللحظة (أولا) بفرض أنهما متجهان الى جهة واحدة ، (ثانيا) بفرض أن اتجاهيهما متضادان .

(١٠) اذا قام قطاران من مواصلة وسارا بسرعتين منتظمتين متساويتين على سكتين تنفرجان بزاوية ٦٠° فأثبت أن المسافة بين القطارين تزيد بسرعة منتظمة تساوى سرعة كل من القطارين .

(١١) أثبت أن محصلة السرعتين اللتين كل منهما تساوى ع والزاوية بينهما تساوى ا هى ٢ ع جتا $\frac{١}{٢}$.

(١٢) اذا حللت السرعة ع الى مركبتين فى جهتين تصنعان مع السرعة الأصلية زاويتى ا ، ب فأثبت أن هاتين المركبتين هما $\frac{\text{ع جا ب}}{\text{جا (ا + ب)}}$ ، $\frac{\text{ع جا ا}}{\text{جا (ا + ب)}}$. ثم حقق صحة هذه النتيجة بأن تبين أنه اذا كانت الزاوية التى بين اتجاهى هاتين السرعتين تساوى (ا + ب) كانت محصلتهما تساوى ع .

الفصـــــل الثـانى

فى العجـــلة

بنـــد ٢٥ — العجلة .

العجلة هى معدّل التغير فى مقدار السرعة .

اذا تحرك جسم فى مستقيم بسرعة منتظمة فان سرعته لاتتغير فى المقدار ولا فى الاتجاه فلا تكون له عجلة .

اذا تحرك جسم فى مستقيم بسرعة تأخذ فى الازدياد فان معدّل الازدياد فى لحظة مايسمى بالعجلة فى تلك اللحظه . وقد تكون العجلة منتظمة أو متغيرة .

اذا تحرك جسم فى مستقيم بسرعة تأخذ فى النقص فان معدّل النقص فى لحظة ما يسمى بالتقصير فى تلك اللحظة . وباستعمال المصطلحين الجبريين "موجب" و"سالب" باشارتيهما + ، — للدلالة على اختلاف الاتجاه يمكننا أن نعتبر التقصير عجلة سالبة أى عجلة فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يعتبر موجبا .

واذا تحرك جسم فى منحن فان اتجاه سرعته يكون متغيرا على الدوام . وبذلك تكون له عجلة فى كل لحظة . ولسنا فى هـذا البـاب بمعتبرين سوى أحوال العجلة فى سرعة جسم يتحرك فى مستقيم .

بنــد ٢٦ — تقـــدير العجلة .

تقدّر العجلة المنتظمة بعدد وحدات السرعة التى بها تزيد أو تنقص السرعة المعلومة فى وحدة الزمن . فاذا اعتبرنا السنتيمتر وحدة للسافة والثانية وحدة للزمن فان وحدة السرعة تكون السنتيمتر فى الثانية ووحدة العجلة تكون تلك العجلة التى بها تزيد السرعة سنتيمترا فى الثانية فى ثانية واحدة .

وبالاختصار نقول ان وحدة العجلة هى السنتيمتر فى الثانية فى الثانية .

وتقدّر أى عجلة أخرى بما يضاف الى السرعة فى ثانية واحدة مقدرا بالسنتيمترات فى الثانية . فبالوحدات السالفة الذكر تكون العجلة ١٨ عبارة عن عجلة بهـا تزاد سرعة الجسم فى الثانية الواحدة سرعة ١٨ سنتيمترا فى الثانية و بالاختصار نقول ان العجلة ١٨ هى عجلة ١٨ سنتيمترا فى الثانية فى الثانية .

تقــدّر العجلة المتغيرة [١] فى لحظة مابعــدد وحدات السرعة التى تتغير بهــا السرعة المعلومة فى وحدة الزمن اذا بقيت العجلة ثابتة مدّة وحدة الزمن ابتداء من تلك اللحظة. ويتضح أن تقدير العجلة يتعلق بوحدة المسافة ووحدة الزمن كما هى الحالة فى السرعة .

(مثـال ١) شوهد أن جسما يتحرك فى مستقيم بسرعة ٥ سنتيمترات فى الثانية وبعد ربع دقيقة بسرعة ٥٠ سنتيمترا فى الثـانية ثم بعد نصف دقيقه بسرعة ٩٥ سـنتيمترا فى الثانية . أثبت أن هــذه الحركة توافق تغير سرعة الجسم بعجلة منتظمة . ثم أوجد مقدار تلك العجلة بالسنتيمترات والثوانى .

قد زادت السرعة فى ربع دقيقة أى فى ١٥ ثانية ٤٥ سنتيمترا فى الثـانية فاذا كان هــذا التغير فى السرعة منتظما تكون الزيادة فى الثـانية الواحدة هى سرعة ٣ سنتيمترات فى الثانيـــة .

وقد زادت السرعة فى نصف دقيقة أى فى ٣٠ ثانية ٩٠ سنتيمترا فى الثانية فاذا كان هــذا التغير منتظما فقد نشأ من زيادة قدرها ٣ سنتيمترات فى الثانية فى الثانيــة . اذن توافق هــذه الحركة من ابتدائها لانتهائها ازدياد السرعة بمقدار ٣ سنتيمترات فى الثانية كل ثانية أى أن الحركة توافق عجلة منتظمة قدرها ٣ سنتيمترات فى الثانية فى الثانية.

(١) قارن بتقدير السرعة المتغيرة .

(مثال ٢) عجلة تقدّر بالعدد ٣٠ عند ما يكون السنتيمتر وحدة المسافة والثانية وحدة الزمن فما مقدارها اذا كانت وحدة المسافة المتر ووحدة الزمن الدقيقة ؟

العجلة التى يكون قدرها ٣٠ عند ما يكون السنتيمتر وحدة المسافة والثانية وحدة الزمن عبارة عن سرعة قدرها ٣٠ سنتيمترا فى الثانية مضافة فى الثانية الواحدة ولكن سرعة ٣٠ سنتيمترا فى الثانية تكافئ سرعة ٠٫٣ من المتر فى الثانية أو ١٨ مترا فى الدقيقة. فتكون العجلة المفروضة تكافئ سرعة ١٨ مترا فى الدقيقة مضافة فى الثانية الواحدة. أى مكافئة سرعة ١٨ × ٦٠ مترا فى الدقيقة مضافة فى الدقيقة الواحدة . أى سرعة ١٠٨٠ مترا فى الدقيقة مضافة فى الدقيقة الواحدة .

فالعجلة تقدّر بالعدد ١٠٨٠ اذا أخذت الوحدتان الجديدتان .

(تمارين ٦)

(١) يتحرك جسم بعجلة منتظمة . فاذا كانت سرعته فى لحظة ما هى ٩ سنتيمترات فى الثانية وبعد مضى ١٥ دقيقة هى ٥٤ سنتيمترا فى الثانية فما عجلته بالسنتيمترات والثوانى ؟

(٢) جسم متحرك سرعته فى لحظة ما تساوى ١٠٠ متر فى الدقيقة فاذا كان تحرّكه منتظم العجلة وكانت سرعته بعد مضى ١٠ ثوان هى ١٦٠ مترا فى الدقيقة فما عجلته بالسنتيمترات والثوانى ؟

(٣) قام قطار وبلغت سرعته ١٥ ميلا فى الساعة بعد دقيقة واحدة ثم بلغت ٣٣ قدما فى الثانية بعد مضى ٣٠ ثانية أخرى . بين أن هذا يوافق التحرك المنتظم العجلة .

(٤) قطار متحرك بعجلة منتظمة تزيد سرعته من ٥ كيلومترات فى الساعة الى ٢٠ كيلومترا فى الساعة وذلك فى مدّة دقيقتين . ماعجلته بالأمتار والثوانى ؟

(٥) قطار متحرك بعجلة منتظمة تزيد سرعته فى مدّة دقيقة واحدة من ٤٠ كيلو مترا فى الساعة الى ٧٠ كيلو مترا فى الساعة . ماعجلته بالأمتار والساعات ؟

(٦) يتحرك قطار بسرعة منتظمة التقصير . وسرعته فى لحظة معينة تساوى ٢٢ مترا فى الثانية وكانت سرعته ٣٣ مترا فى الثانية قبل تلك اللحظة بمدة ١١ ثانية .

ماذا كانت سرعته (أولا) قبل تلك اللحظة بمدة ٧ ثوانٍ . (ثانيا) قبلها بمدة ١٧ ثانية وماذا تكون سرعته (ثالثا) بعد ٣ ثوانٍ . (رابعا) بعد ١١ ثانية . قدّر الأجوبة بالأمتار فى الثانية .

(٧) عجلة تقدّر بالعدد ٣٢ عند ما تكون القدم والثانية وحدتى المسافة والزمن . فما قدرها عند ما تكون وحدتا المسافة والزمن (أولا) الياردة والدقيقة . (ثانيا) نصف القدم ونصف الثانية . (ثالثا) الميل والساعة .

(٨) أوجد ماتساويه عجلة ٣٠٠ سنتيمتر فى الثانية فى الثانية اذا كانت وحدتا الطول والزمن هما : (أولا) المتر والساعة . (ثانيا الديسمتر واليوم . (ثالثا) الكيلومتر والدقيقة .

(٩) عجلة قدرها ا من الأمتار فى الثانية فى الثانية فما قدرها عند ما تكون وحدتا الطول والزمن هما : (أولا) ب من الأمتار وثانية واحدة . (ثانيا) مترا واحدا 6 حـ من الثوانى . (ثالثا) ب من الأمتار 6 حـ من الثوانى ؟

(١٠) اذا كانت العجلة ا من الأقدام فى الثانية فى الثانية تساوى ب من المرات من العجلة حـ من الياردات فى الثانية فى الثانية فأثبت أن ا = ٣ ب حـ .

بند ٢٧ — الجسم الذى يتحرك فى مستقيم بعجلة منتظمة .

يتحرك جسم فى مستقيم بعجلة منتظمة قدرها حـ فاذا كانت ع سرعته فى لحظة معلومة فأوجد السرعة غ التى يتحرك بها بعد تلك اللحظة بزمن د من الثوانى وكذا المسافة ف التى يقطعها فى الزمن د .

لكون الجسم يتحرك بالعجلة المنتظمة حـ ينتج أن السرعة تزيد فى كل وحدة من الزمن وحدات من السرعة عددها حـ فتزيد السرعة فى د من وحدات الزمن وحدات من السرعة عددها حـ د فاذا رمزنا بالرمز غ الى السرعة فى آخر الزمن د .

يكون غ = ع + حـ د ... ... (١)

فالسرعة تزداد ازديادا منتظما بازدياد الزمن فينتج أن السرعة المتوسطة أثناء الزمن د هى نصف مجموع السرعة فى الابتداء والسرعة فى آخر الزمن .

فالسرعة المتوسطة = ١/٢ (ع + ع + حـ د)

= ع + ١/٢ حـ د

وبمقتضى بند ١٤ نجد أن المسافة ف المقطوعة أثناء الزمن د تساوى حاصل ضرب السرعة المتوسطة فى الزمن .

وعلى ذلك ف = د (ع + ١/٢ حـ د)

= ع د + ١/٢ حـ د^{٢} ... ... (٢)

ومن القانونين (١) ، (٢) يمكن استنباط قانون ثالث بالجبر كما يأتى :

بتربيع قيمة غ التى بالقانون الأول يحدث .

غ^{٢} = ع^{٢} + ٢ ع حـ د + حـ^{٢} د^{٢}

= ع^{٢} + ٢ حـ (ع د + ١/٢ حـ د^{٢})

= ع^{٢} + ٢ حـ ف ... ... (٣)

وهذا قانون يبين العلاقة بين السرعة والمسافة المقطوعة .

حالتان خاصتان :

(أولا) اذا ابتدأ الجسم من حالة السكون .

تكون ع = صفرا وتؤول القوانين (١) ، (٢) ، (٣) الى ما يأتى :

غ = حـ د ، ف = ١/٢ حـ د^{٢} ، غ^{٢} = ٢ حـ ف

(ثانيا) اذا ابتدأ الجسم بسرعة ع فى اتجاه وكانت عجلته حـ فى الاتجاه المضاد نعتبر العجلة سالبة ونضع — حـ بدل حـ فتؤول القوانين الى ما يأتى :

غ = ع — حـ د

ف = ع د — ١/٢ حـ د^{٢}

غ^{٢} = ع^{٢} — ٢ حـ ف

(مثال ١) أخذ جسم يتحرك بسرعة ١/٢ ٧ من السنتيمترات فى الثانية وكانت عجلته ١٠ سنتيمترات فى الثانية فى الثانية فما الزمن الذى بعده تصير سرعته أربعة أمثالها أولا وما المسافة التى يقطعها فى ذلك الزمن ؟

نأخذ السنتيمتر وحدة للمسافة والثانية وحدة للزمن فتكون .

حـ = ١٠ ع = $\frac{1}{2}$ ٧ غ = ٤ × $\frac{1}{2}$ ٧ = ٣٠ والمطلوب ايجاد ف ، د

بقانون (١) ٣٠ = $\frac{1}{2}$ ٧ + ١٠ د

ومنه د = $\frac{1}{4}$ ٢ من الثوانى

وبقانون (٢) ف = $\frac{1}{2}$ ٧ × $\frac{1}{4}$ ٢ + $\frac{1}{2}$ × ١٠ × $(\frac{1}{4}\ ٢)^2$

= ٤٢٫١٨٧٥ من السنتيمترات

(مثال ٢) أخذ جسم يتحرك من حالة السكون بعجلة قدرها ٢٠ سنتيمترا فى الثانية فى الثانية فما المسافة التى يقطعها فى ٦ ثوان وما سرعته فى آخر ذلك الزمن؟

هنا ع = صفرا فنستعمل قوانين الحالة الخاصة الأولى لايجاد غ ، ف

العجلة حـ = ٢٠ ، د = ٦

فعلى ذلك غ = ٢٠ × ٦ = ١٢٠ سنتيمترا فى الثانية

، ف = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ × ٦^2 = ٣٦٠ سنتيمترا

(مثال ٣) قطار يسير بسرعة ٦٠ ميلا فى الساعة عند ما يكون البخار محبوسا . فاذا انقصت سرعته فى دقيقة بانتظام حتى صارت ٣٠ ميلا فى الساعة فأوجد تقصيره مقدرا بالأقدام والثوانى ثم أوجد المسافة التى يقطعها فى ذلك الزمن .

العجلة فى هذه الحالة سالبة . فنستعمل قوانين الحالة الخاصة الثانية

سرعة ٦٠ ميلا فى الساعة = سرعة ٨٨ قدما فى الثانية

سرعة ٣٠ ميلا فى الساعة = سرعة ٤٤ قدما فى الثانية

الدقيقة = ٦٠ ثانية

فاذا أخذنا القدم والثانية وحدتين للمسافة والزمن تكون

ع = ٨٨ ، غ = ٤٤ ، د = ٦٠

فبالقانون الأول يكون

٤٤ = ٨٨ — ٦٠ حـ

ومنه حـ = $\frac{11}{15}$

فيكون التقصير $\frac{١١}{١٥}$ من القدم فى الثانية فى الثانية

ولايجاد المسافة التى يقطعها فى الزمن المعلوم نستعمل القانون الثالث

فيكون $٤٤^٢ = ٨٨^٢ - ٢ \times \frac{١١}{١٥} \times ف$

ومنه $\frac{٢٢}{١٥} ف = ٨٨^٢ - ٤٤^٢$

$\therefore$ ف = ٣٩٦٠ قدما

= ١٣٢٠ ياردة وهى المسافة المطلوبة

(تمارين ٧)

(١) يتحرك جسم مبتدئا من حالة السكون بعجلة ٨ سنتيمترات فى الثانية فى الثانية ما المسافة التى يقطعها فى نصف دقيقة ؟

(٢) يتحرك قطار بعجلة منتظمة فاذا قطع الكيلومتر الأول فى ٥ دقائق فما السرعة التى اكتسبها فى نهاية ذلك الزمن وما الزمن الذى يقطع فيه الكيلومتر الثانى ؟

(٣) جسم تزيد سرعته من ٥٠ سنتيمترا فى الثانية الى ٦٠ سنتيمترا فى الثانية أثناء قطعه مسافة ١١ سنتيمترا . فاذا كانت عجلته منتظمة فما مقدارها ؟

(٤) اذا تحرك جسم من حالة السكون بعجلة ١٠ سنتيمترات فى الثانية فى الثانية فما المسافات التى يقطعها أثناء كل من الثانية الأولى والثانية والثالثة والرابعة والخامسة من تحركه ؟

(٥) قطع جسم ١٢٠ مترا ، ٢٢٨ مترا ، ٣٣٦ مترا فى ثلاثة أعشار متتالية من الثانية . بين أن هذا يوافق التحرك بعجلة منتظمة . ثم أوجد مقدار تلك العجلة بفرض أن وحدتى الطول والزمن هما المتر والدقيقة .

(٦) تحرك جسم من حالة السكون بعجلة منتظمة فشوهد بعد زمن أنه قطع ٥٥ س . م فى ثانيتين ثم قطع ٧٧ سنتيمترا فى الثانيتين التاليتين لهما . فما المسافة التى يقطعها فى ٦ ثوان ابتداء من قيامه ؟

(٧) تحرك جسم من حالة السكون بعجلة منتظمة فقطع ٥ سنتيمترات فى الثانية الأولى فما المسافة التى يقطعها فى ثانيتين وفى ٣ ثوان وفى ٤ ثوان وفى ٥ ثوان ابتداء من قيامه فى كل حالة ؟

(٨) يتحرك جسم بسرعة منتظمة التقصير فاذا كانت سرعته فى وقت ما ٢٠ كيلومترا فى الساعة وصار فى حالة السكون بعد ذلك الوقت بمدة ١٠٠ ثانية فما المسافة التى قطعها فى تلك المدة ؟

(٩) تحرك جسم من حالة السكون بعجلة منتظمة فقطع مسافة معينة فى الثانية الأولى . أثبت أنه يقطع قدر هذه المسافة ١٥ مرة فى ثلاث الثوانى التالية .

(١٠) تحرك جسم من حالة السكون بعجلة منتظمة فقطع ب من الأمتار فى ط من الثوانى . فما الزمن الذى يقطع فيه المسافة التالية التى قدرها ب من الأمتار ؟

(١١) تزيد سرعة قطار بعجلة منتظمة مدة ١٠ دقائق من قيامه ثم تبقى ثابتة مدة ١٥ دقيقة ثم تنقص مدة ٥ دقائق بتقصير منتظم يساوى ضعف العجلة فى المدة الأولى . قارن بين المسافة التى قطعها القطار فى كل من الأزمنة الثلاثة . والمسافة التى قطعها فى المدة كلها .

(١٢) قام الجسم ا من نقطة ما متحركا بعجلة منتظمة فقام بعده الجسم ب من النقطة نفسها متحركا بعجلة منتظمة أكبر من عجلة ا . أثبت أن نسبة فرق السرعتين حينما يكون ب قد لحق ا الى سرعة ا فى ذلك الوقت كنسبة سرعة ا حينما قام ب الى السرعة التى اكتسبها ا أثناء باقى الحركة .

(١٣) تدحرجت كرة فى حفر مستقيم مارة بأربع نقط هى ا ، ب ، حـ ، ى وكانت المسافة من ا الى ب ٣٧,٠٥ من السنتيمترات ومن ب الى حـ ١٠١,٢ من السنتيمترات ومن حـ الى ى ١٥٧,٥٥ من السنتيمترات فمرت الكرة من ا الى ب فى ١,٣ من الثوانى ومن ب الى حـ فى ٢,٢ من الثوانى ومن حـ الى ى فى ٢,٣ من الثوانى فالمطلوب

(أولا) بيان أن هذه المعلومات توافق تحركها بعجلة منتظمة .

(ثانيا) إيجاد مقدار العجلة بالسنتيمترات والثوانى .

(ثالثا) إيجاد سرعتها عند ماتمر بنقطتى ا ، ء .

بند ٢٨ — تركيب وتحليل العجلات كالسرع .

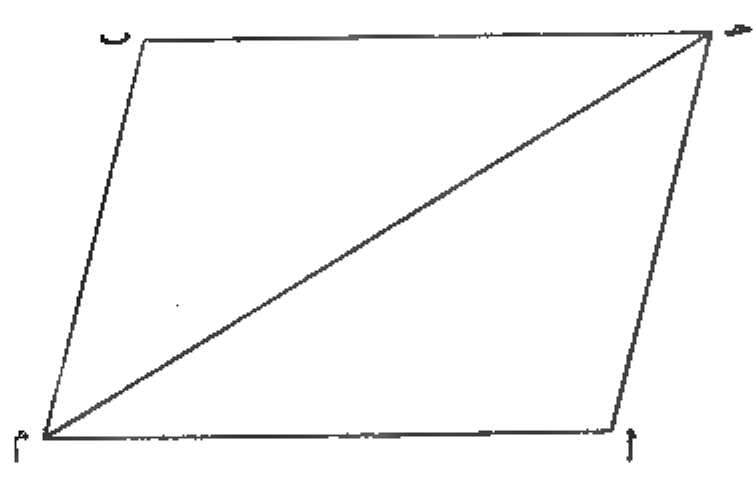
تتعين العجلة بمقدارها واتجاهها فالعجلات كالسرع يمكن تمثيلها رسما بالخطوط المستقيمة .

إذا كان لجسم عجلتان فى اتجاهين بينهما زاوية ما ومثلنا العجلتين فى المقدار والاتجاه بمستقيمين فان المستقيم الذى يمثل محصلتهما (أو العجلة الحقيقية) يوجد بالعمل المبين فى بند ١٨ .

إذن هناك نظرية تناظر متوازى الأضلاع للسرع . وتعرف بمتوازى الأضلاع للعجلات .

متوازى الأضلاع للعجلات — اذا كان لجسم عجلتان يمثلهما فى المقدار والاتجاه المستقيمان م ا ، م ب فان العجلة المحصلة يمثلها القطر م حـ من متوازى الأضلاع الذى ضلعاه المتجاوران م ا ، م ب .

وتنتج هذه النظرية مباشرة من متوازى الأضلاع للسرع .



فالمستقيمان م ا ، م ب يمثلان عجلتين أى سرعتين قد أضيفتا فى الاتجاهين م ا ، م ب على التناظر فى وحدة الزمن فبمقتضى متوازى الأضلاع للسرع يمثل القطر م حـ السرعة الحقيقية المضافة فى وحدة الزمن أى أن م حـ يمثل العجلة الحقيقية أو العجلة المحصلة .

ومن حيث ان العجلات تركب باستخدام متوازى الأضلاع فكل نتائج متوازى الأضلاع للسرع وهى التى فى بند ١٩ — ٢٤ صحيحة أيضا اذا استعضنا فيها كلمة عجلة عن كلمة سرعة . فالقوانين الجبرية لايجاد محصلة سرعتين أو أكثر لاتزال صحيحة اذا دلت رموز مقادير السرع فيها على مقادير العجلات .

وقلما نحتاج فى الديناميكا الابتدائية الى تركيب العجلات . ولكننا سنرى أحوالا فى الحركة تستلزم إيجاد المركبة فى اتجاه معلوم فاذا رمزنا الى العجلة بالرمز حـ والى الزاوية التى يصنعها اتجاه العجلة مع الاتجاه المعلوم بالرمز و تكون المركبة فى الاتجاه المعلوم حـ جتاو كما هى الحال فى السرعة .

الباب الثالث — قواعد الديناميكا

بند ٢٩ — الكتلة والكثافة .

عرفنا فى بند ٢ كتلة الجسم بما يحتويه من المادة . ولتقدير كتلة جسم نختار كتلة معينة لتكون وحدة . فيكون عدد مرات احتواء الكتلة المراد تقديرها على الوحدة هو قياس تلك الكتلة .

ويستعمل علماء الطبيعة وحدتين للكتلة وهما الجرام و الباوند .

أما الجرام فهو وحدة الكتلة فى القاعدة الفرنسية ويعرف بأنه كتلة تساوى $\frac{1}{1000}$ من كتلة الكيلوجرام . وكتلة الكيلوجرام تساوى كتلة قطعة معينة من المعدن قد وضعت فى خزينة الحكومة الفرنسية بباريس .

وأما الباوند فهو وحدة الكتلة فى القاعدة الانجليزية . ويعرف بأنه كتلة تساوى كتلة قطعة معينة من المعدن قد وضعت فى إحدى خزائن الحكومة الانجليزية بلندرة

كثافة الجسم هى كتلة وحدة الحجم من ذلك الجسم .

بند ٣٠ — وحدات المسافة والكتلة والزمن .

أتينا فى بندى ١١ ، ٢٩ على ذكر وحدات المسافة والكتلة والزمن (أى الوحدات الثلاث الأساسية فى علم الديناميكا) المستعملة فى قاعدة الوحدات الفرنسية وفى قاعدة الوحدات الانجليزية ويمكن ترتيبها فى جدول كالآتى :

وحدة	القاعدة الفرنسية	القاعدة الانجليزية
المسافة	السنتيمتر	القدم
الكتلة	الجرام	الباوند
الزمن	الثانية	الثانية

والقاعدة الفرنسية هى القاعدة الكثيرة الاستعمال لدى علماء الطبيعة فى أوربا

بند ٣١ — كمية التحرك .

كمية تحرك الجسم فى لحظة ما عبارة عن حاصل ضرب كتلة الجسم فى سرعته فى تلك اللحظة .

وحدة كمية التحرك فى القاعدة الفرنسية هى كمية تحرك كتلة قدرها جرام تتحرك بسرعة سنتيمتر فى الثانية ووحدة كمية التحرك فى القاعدة الانجليزية هى كمية تحرك كتلة قدرها باوند تتحرك بسرعة قدم فى الثانية

كمية التحرك لجسم كتلته ك يتحرك بسرعة ع هى ك ع

ويقدر التغير فى كمية تحرك جسم متحرك أثناء زمن معلوم بالفرق بين كمية تحركه فى نهاية ذلك الزمن وكمية تحركه فى الابتداء . فاذا كانت ك كتلة جسم يتحرك فى ابتداء زمن معلوم بسرعة ع وفى نهاية ذلك الزمن بسرعة عَ يكون التغير فى كمية التحرك أثناء ذلك الزمن هو

$$\text{ك عَ} - \text{ك ع} = \text{ك} \left(\text{عَ} - \text{ع} \right)$$

ومن الصورة الثانية نرى أن التغير فى كمية التحرك يساوى حاصل ضرب كتلة الجسم فى التغير فى سرعته .

(مثال ١) كتلة ٥٠ سنتيمترا مكعبا من المادة ا هى ١٢٥ جراما وكتلة ٨٠ سنتيمترا مكعبا من المادة ب هى ٩٦ جراما قارن بين كثافتى ا ، ب

كتلة سنتيمتر مكعب من ا $= \frac{١٢٥}{٥٠}$ من الجرامات

كتلة سنتيمتر مكعب من ب $= \frac{٩٦}{٨٠}$ من الجرامات

∴ كثافة ا : كثافة ب $= \frac{١٢٥}{٥٠} : \frac{٩٦}{٨٠}$

$= ٢٥ : ١٢$

(مثال ٢) جسم كتلته ١٠٠ باوند يتحرك فى لحظة معلومة بسرعة ٣٠ ميلا فى الساعة وبعد تلك اللحظة بسبع ثوان يتحرك بسرعة ١٧ ياردة فى الثانية . فما التغير الكلى فى كمية التحرك ؟ واذا كان هذا التغير منتظما فما التغير فى الثانية ؟

سرعة ٣٠ ميلا فى الساعة = سرعة ٤٤ قدما فى الثانية

« ١٧ ياردة فى الثانية = سرعة ٥١ قدما فى الثانية

فالتغير فى السرعة = ٥١ − ٤٤ = ٧ أقدام فى الثانية .

ويكون التغير الكلى فى كمية التحرك على حساب القاعدة الانجليزية ٧ × ١٠٠ أى ٧٠٠

وقد حدث هذا التغير فى ٧ ثوان فان كان منتظما كان التغير فى الثانية

$\frac{١}{٧}$ × ٧٠٠ أى ١٠٠

(تمارين ٨)

(١) جسمان حجم أحدهما ٥ س . م مكعبة وحجم الآخر $\frac{١}{٥}$ الديسيمتر المكعب فاذا كانت كتلة الأول ١٥ جراما وكتلة الثانى ٣,٢ من الكيلوجرامات فما نسبة كتلة الأول الى كتلة الثانى وما نسبة كثافة الأول الى كثافة الثانى ؟

(٢) اذا كانت كتلة السنتيمتر المكعب من الماء جراما واحدا فكم جراما فى القدم المكعبة من الرصاص ؟ (القدم = ٣٠,٤٥ من السنتيمترات وكثافة الرصاص قدر كثافة الماء ١١,٤٤٥ من المرات) .

(٣) قدر كمية التحرك للأجسام الآتية بالوحدات الفرنسية :

(١) كتلة ٤ جرامات متحركة بسرعة ٣٠ سنتيمترا فى الساعة . (٢) كتلة ١٤ جراما متحركة بسرعة ١٣ مترا فى الثانية . (٣) كتلة ١٥ جراما متحركة بسرعة ٤ أمتار فى الدقيقة . (٤) كتلة ٢٠ كيلوجراما متحركة بسرعة ٣ أمتار فى الثانية .

(٤) أوجد مقدار التغير فى كمية تحرك جسم كتلته ٤ كيلوجرامات اذا تغيرت سرعته من ٨٠٠ سنتيمتر فى الثانية الى ١٠ أمتار فى الثانية . واذا حدث هذا التغير فى ٥ ثوان بطريقة منتظمة فما التغير الذى يحدث فى كمية التحرك فى ثانية واحدة ؟

(٥) قدر كمية التحرك للأجسام الآتية بالوحدات الانجليزية (١) كتلة ٤ باوندات متحركة بسرعة ١٠ ياردات فى الثانية . (٢) قطار كتلته ٢٠٠ طن متحرك بسرعة ٤٠ ميلا فى الساعة .

(٦) أوجد مقدار التغير فى كمية تحرك جسم كتلته $٢\frac{١}{٢}$ من الأطنان اذا تغيرت سرعته من ٤٠ قدما فى الثانية الى ٤٠ ميلا فى الساعة واذا حدث هذا التغير فى ١٠ ثوان بطريقة منتظمة فما التغير الذى يحدث فى كمية التحرك فى ثانية واحدة ؟

بند ٣٢ — قوانين نيوتن (Newton) فى الحركة .

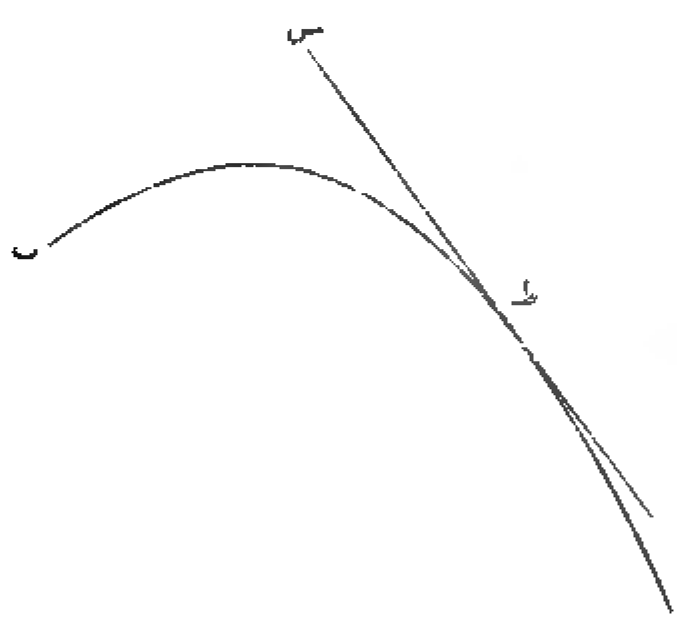
القوانين الثلاثة الآتيــة التى تتعلق بتأثير القوة فى المـادة هى أساس علم الديناميكا وتعرف بقوانين نيوتن فى الحركة .

بند ٣٣ — القـانون الأول .

كل جسم يبقى فى حالة السكون أو فى حالة التحرك المنتظم فى خط مستقيم ما لم تؤثر فيه قوة تغير حالته .

ويدل هذا القانون (أولا) على أن الجسم السا كن يبقى سا كنا مالم تؤثر فيه قوة

(ثانيا) على أن الجسم الذى يتحرك فى لحظة ما بأى سرعة وفى أى اتجاه يبقى متحركا فى ذلك الاتجاه وبتلك السرعة ما لم تؤثر فيه قوة بعد تلك اللحظة . واذا كان جسم سا كنا فى لحظة معينة ثم وجدناه بعد ذلك متحركا فقد حدث تغير فى حالة سكونه وهذا التغير لابد أن يكون ناشـئا من تأثير قوة . واذا تحرك جسم فى مستقيم بسرعة معينة ثم وجدناه بعد ذلك يتحرك فى مستقيم آخر أو فى نفس المستقيم بسرعة أخرى فقد حدث تغير فى حالة تحركه . وهــذا التغير لابد أن يكون ناشئا من تأثير قوة . واذا تحرك جسم فى المنحنى ا ط فان حركته تكون متغيرة على الدوام فلا بد أن يكون هناك قوة تؤثر فيه دائمـا لأنه لو لم تؤثر فيــه قوة وهو فى الوضع ط لبقى متحركا بسرعته فى اتجاه حركته فى تلك اللحظة .



ومن حيث ان اتجاه الحركة فى نقطة ما من المنحنى هو المماس له فى تلك النقطــة ينتج أنه لو لم تؤثر فى الجسم قوة وهو فى الوضع ط لبقى متحركا فى الاتجـاه ط س بسرعته فى تلك النقطة .

فبينما يتحــرك الجسم فى المنحنى يتحول دائما عن المماس الذى يتحرك فيه لحظة . اذن هناك تغير مستمر فى اتجاه الحركة وهو لا بد ناشئ من قوة تؤثر دائمـا .

ويمكن التعبير عن القانون الأول فى الحركة كما يأتى :

أى شئ يغير حركة الجسم فى المقدار أو فى الاتجاه فهو قوة .

فكل الأجسام على هذا تميل الى البقاء على حالة سكونها أو حالة تحركها بانتظام فى اتجاه مستقيم . أى أن كل الأجسام تعمل على مقاومة تغير الحركة . ويسمى ميل الجسم الى مقاومة تغير الحركة بالقصور الذاتى . وسنرى أن القصور الذاتى لجسم يتناسب مع كتلته .

وسبب أن زيادة سرعة قطار بضاعة ثقيل أصعب من زيادة سرعة قطار ركاب خفيف هو أن القصور الذاتى للأول أكبر منه للثانى .

وللسبب عينه نرى أنه اذا حبس البخار عن قطار بضاعة يسير بنفس السرعة التى يسير بها قطار ركاب فمدة بقائه على الحركة أطول من مدة بقاء الثانى عليها .

بند ٣٤ — القانون الثانى .

يتناسب التغير فى كمية تحرك الجسم مع القوة التى تؤثر فيه ويحدث التغير فى اتجاه القوة .

ويبين القانون الأول فى الحركة أن التغير فى كمية التحرك ينشأ من تأثير القوة وحدها . ويزيد القانون الثانى أن مقدار التغير يتناسب مع مقدار القوة .

وليلاحظ أنه عند مقارنة مقدارى قوتين بمقارنة تغيرى كمية التحرك الناشئين منهما يجب أن يكون هذان التغيران قد حدثا فى زمنين متساويين .

ومن حيث ان القوة التى تؤثر فى جسم تتناسب مع التغير فى كمية تحركه فان تأثير القوة يكون واحدا سواء كان الجسم ساكنا أو متحركا عند ماتبدأ القوة تأثيرها فاذا أثرت قوة ثابتة فى جسم فان التغير فى كمية التحرك أثناء الوحدة الأولى من الزمن يساوى تغيره أثناء الوحدة الثانية منه وعلى العموم يساوى التغير أثناء أى وحدة من الزمن الذى تؤثر أثناءه تلك القوة .

وقد علمنا من بند (٣١) أن التغير فى كمية التحرك أثناء وحدة الزمن عبارة عن حاصل ضرب كتلة الجسم فى التغير فى سرعته أثناء وحدة الزمن .

ونعلم أن التغير فى السرعة فى وحدة الزمن عبارة عن العجلة فمن ذلك نستنتج النتيجة الهامة الآتية :

اذا أثرت قوة ثابتة فى جسم فانها تجعل الجسم يتحرك بعجلة ثابتة وتكون القوة مناسبة لحاصل ضرب كتلة الجسم فى العجلة .

اذن تتساوى قوتان اذا أحدثتا عجلتين متساويتين فى كتلتين متساويتين وعلى العموم يقال ان القوى تتناسب مع العجلات التى تحدثها فى الكتل المتساوية. ولاحداث عجلتين متساويتين فى كتلتين مختلفتين يجب أن تكون كل قوة مناسبة للكتلة التى تؤثر فيها .

واذا أثرت قوى متساوية فى كتل مختلفة فان العجلات الحادثة تتناسب تناسبا عكسيا مع الكتل . فكلما عظمت كتلة الجسم عظم قبولها لمقاومة العجلة . أو بعبارة أخرى كلما عظمت كتلة الجسم عظم قصوره الذاتى .

(مثال) يتحرك الجسم ا الذى كتلته ٨ باوندات متجها نحو الشمال بسرعة ٣٠ ميلا فى الساعة فى لحظة معينة . ويتحرك فى الوقت نفسه الجسم ب الذى كتلته نصف باوند متجها نحو الجنوب بسرعة ٥٥ قدما فى الثانية . وقد وجد فى لحظة تالية أن ا يتحرك جنوبا بسرعة ٣٣ قدما فى الثانية ، ب يتحرك شمالا بسرعة ١٥ ميلا فى الساعة . قارن بين القوتين اللتين تؤثران فى ا ، ب أثناء المدة بين اللحظتين .

قد تغيرت سرعة ا من ٣٠ ميلا فى الساعة ، ٤٤ قدما فى الثانية جهة الشمال الى ٣٣ قدما فى الثانية جهة الجنوب فالتغير = ٤٤ + ٣٣ = ٧٧ قدما فى الثانية جنوبا . ويكون التغير فى كمية التحرك بالوحدات الانجليزية ٨ × ٧٧ جنوبا وقد تغيرت سرعة ب من ٥٥ قدما فى الثانية جنوبا الى ١٥ ميلا فى الساعة ، ٢٢ قدما فى الثانية شمالا . فالتغير فى السرعة = ٥٥ + ٢٢ = ٧٧ قدما فى الثانية شمالا . ولكون كتلة ب هى $\frac{1}{2}$ باوند يكون التغير فى كمية التحرك $\frac{1}{2}$ × ٧٧ شمالا . وبمقتضى القانون الثانى فى الحركة تكون القوتان اللتان أحدثتا هذين التغيرين مناسبتين لهما .

فالقوة المؤثرة فى ا : القوة المؤثرة فى ب

= ٨ × ٧٧ : $\frac{1}{2}$ × ٧٧ = ١٦ : ١

فمقدار القوة المؤثرة فى ا لابد أن تكون ستة عشر من أمثال القوة المؤثرة فى ب . وأولاهما تؤثر جنوبا والثانية تؤثر شمالا

بند ٣٥ — الوحدات المطلقة أو الديناميكية للقوة .

رأينا فى بند (٥) أن هناك مانعا من استعمال ثقل الكيلو جرام وحدة للقوة وهو أنه يختلف باختلاف أجزاء سطح الكرة الأرضية .

و يستدل من القانون الثانى فى الحركة على وحدة ثانية للقوة تسمى بالوحدة المطلقة أو الوحدة الديناميكية للقوة وتعرف كما يأتى :

الوحدة المطلقة أو الديناميكية للقوة هى تلك القوة التى اذا أثرت فى وحدة الكتلة مدة وحدة الزمن تحدث تغيرا فى السرعة قدره الوحدة .

وتتعلق أى وحدة مطلقة للقوة بالوحدات المستعملة للمسافة والكتلة والزمن فاذا اتفق على وحدة مطلقة للقوة تقدر أى قوة أخرى بعدد وحدات السرعة التى تحدثها تلك القوة فى وحدة الكتلة أثناء وحدة الزمن . أو بعبارة أخرى . تقدر القوة تقديرا مطلقا بعدد وحدات العجلة التى تحدثها فى وحدة الكتلة .

بند ٣٦ — الداين والباوندال .

تستعمل فى الديناميكا وحدتان مطلقتان للقوة وهما الداين والباوندال .

فالداين هو الوحدة المطلقة للقوة فى قاعدة الوحدات الفرنسية . والباوندال هو الوحدة المطلقة للقوة فى قاعدة الوحدات الانجليزية .

إذن .

الداين عبارة عن تلك القوة التى اذا أثرت فى كتلة الجرام مدة ثانية أحدثت فيها سرعة سنتيمتر فى الثانية .

والباوندال عبارة عن تلك القوة التى اذا أثرت فى كتلة الباوند مدة ثانية أحدثت فيها سرعة قدم فى الثانية .

بند ٣٧ — قانون ايجاد العجلة ح التى تحدثها القوة ق فى الكتلة ك .

رأينا أن القوة تقدر بالعجلة التى تحدثها فى وحدة الكتلة إذ وحدة القوة هى القوة التى تحدث وحدة العجلة فى وحدة الكتلة .

فاذا أحدثت قوة وحدات من العجلة عددها ح فى وحدة الكتلة فان القوة يكون مقدارها العددى ح . واذا أحدثت وحدات من العجلة عددها ح فى ك من وحدات الكتلة يكون مقدار القوة ك ح . فاذا رمزنا للقوة بالرمز ق يكون

$$ق = ك ح \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

ومنه
$$ح = \frac{ق}{ك} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

وهذان القانونان يبينان العلاقة بين الكينياتيكا والكينيتيكا فيستدل من القانون الأول على أنه اذا تحركت كتلة ك بعجلة ح تكون القوة التى تولد الحركة ك ح مقدرة بالوحدات المطلقة . ومن الثانى نرى أنه اذا أثرت قوة ق مقدرة بالوحدات المطلقة فى كتلة ك فان العجلة التى تحدثها القوة تكون $\frac{ق}{ك}$.

(مثال ١) ما هى القوة بالباوندالات التى اذا أثرت فى ١١٢ باوندا تحدث فى ١١ دقيقة سرعة قدرها ميل فى الدقيقة ؟

سرعة ميل فى الدقيقة عبارة عن سرعة ٨٨ قدما فى الثانية .

وقد حدثت هذه السرعة فى ١١ دقيقة فالسرعة التى تحدث فى الثانية هى ٨٨ ÷ (١١ × ٦٠) أى $\frac{٢}{١٥}$ من القدم فى الثانية فتكون العجلة مقدرة بالأقدام والثوانى هى $\frac{٢}{١٥}$. وقد أحدثت هذه العجلة فى كتلة ١١٢ باوندا فالقوة = ١١٢ × $\frac{٢}{١٥}$ = $\frac{٢٢٤}{١٥}$ = ١٤٫٩٣ من الباوندالات .

(مثال ٢) أوجد بالداينات مقدار القوة اللازمة لتحريك ٦٩ جراما من حالة السكون مسافة ٥٠٠ سنتيمتر فى ٣٤٫٥ من الثوانى .

نفرض أن ح هى العجلة التى تحدثها القوة فبهذه العجلة يقطع الجسم ٥٠٠ سنتيمتر فى ٣٤٫٥ من الثوانى مبتدئا من حالة السكون . فبمقتضى بند ٢٧ ينتج أن

$$٥٠٠ = \frac{١}{٢} \times ح \times (٣٤٫٥)^٢$$

ومنه $$ح = \frac{١٠٠٠}{(٣٤٫٥)^٢}$$

والقوة المطلوبة $$= \frac{١٠٠٠}{(٣٤٫٥)^٢} \times ٦٩$$

= ٥٧٫٩٦ من الداينات تقريبا .

(تمارين ٩)

(١) جسم كتلته ٢٠ جراما متحرك بسرعة ٤٠ سنتيمترا فى الثانية تؤثر فيه قوة ثابتة فى جهة مضادة لاتجاه الحركة فتوقفه بعد قطعه مسافة ٤٠٠ سنتيمتر . ما مقدار تلك القوة بالداينات ؟

(٢) أثرت قوة ثابتة فى جسم كتلته ١٢ جراما مدة ١٠ ثوان فأكسبته سرعة قدرها ١٥ سنتيمترا فى الثانية . قدّر تلك القوة بالداينات . وقدر أيضا السرعة التى يكسبها جسم كتلته ٨ جرامات اذا أثرت فيه تلك القوة مدة ٥ ثوان .

(٣) أثرت قوة ثابتة فى جسم كتلته ٢٠ جراما مدة ٣ ثوان فأكسبته سرعة قدرها ٢٤ سنتيمترا فى الثانية . قدّر تلك القوة بالداينات .

(٤) أثرت قوة ثابتة فى جسم كتلته نصف باوند مدة ٦ دقائق فأكسبته سرعة قدرها ١٠ أقدام فى الثانية . ما مقدار تلك القوة بالباوندالات ؟

(٥) تتحرك نقطة مادية فى مستقيم بسرعة ٥ سنتيمترات فى الثانية وبعد مضى ربع دقيقة يرى أنها متحركة بسرعة ٥٠ سنتيمترا فى الثانية . ثم بعد مضى ربع دقيقة أخرى بسرعة ٩٥ سنتيمترا فى الثانية . بيّن أن هذه الحركة توافق وجود قوة ثابتة مؤثرة فى النقطة المادية .

(٦) اذا أثرت قوة ثابتة فى كرة كتلتها ١٠ باوندات مدة دقيقة واحدة فازدادت سرعتها من ١٠ أقدام فى الثانية الى ٥٠ قدما فى الثانية . فما مقدار تلك القوة ؟

(٧) ما القوة الثابتة الأفقية اللازمة لإيقاف قطار كتلته ١٠٠ طونولاتة يتحرك بسرعة ٥٠ كيلومترا فى الساعة (أولا) فى دقيقة واحدة (ثانيا) فى مسافة ٢٠٠ متر؟

(٨) جسم كتلته ٨١ باوندا يتحرك بسرعة ابتدائية قدرها ٢٠٠ قدم فى الثانيـة فاذا قاومتـه قوة قدرها ١٠٨ باوندالات فأوجد المسافة التى يقطعها فى حين نقصان سرعته من ٢٠٠ الى ١٩٦ قدما فى الثانية . وكذا فى حين نقصانها من ٤ أقدام فى الثانية الى صفر .

(٩) عربة كتلتها ٣ أطنان جُرّت فى طريق أفق بحبل فاكتسبت سرعة قدرها ١٠ أقدام فى الثانية بعد مضى ٥ ثوان من ابتداء حركتها . فاذا جُرّت مرة أخرى من حالة السكون وكان حملها ضعف ما كان فى المرة الأولى وكانت قوة الشد فى الحبل ٣ أمثال ما كانت فى المرة الأولى . فما سرعتها عند انتهاء ١٠ ثوان ؟

(١٠) اذا أثرت القوة قَ فى جسم كتلته ٥ باوندات زادت سرعته فى كل ثانية ١٢ قدما فى الثانيـة . فاذا أثرت القوة قً فى جسم كتلته ٢٨ باوندا زادت سرعته فى كل ثانية $\frac{1}{2}$٧ من الأقدام فى الثانية . أوجد نسبة قَ : قً

(١١) اذا كانت كتلة جميع عربات قطار ٢٠٠ طن وجرتهـا القاطرة بعجلة منتظمة قدرها ٣ أقدم فى الثانيـة فى الثانية فما مقدار الشد فى الروابط التى بين القاطرة والعربة الأولى ؟

(١٢) اذا اتخذت البوصة والثانية والاونس وحدات للطول والزمن والكتلة فقارن بين وحدة القوة والباوندال .

(١٣) اذا اتخذ المتر والدقيقة والكيلوجرام وحدات للطول والزمن والكتلة فقارن بين وحدة القوة والداين .

بند ٣٨ — قـوة التثاقل .

يشاهد أن الأجسام المتروكة ونفسها تسقط متجهة نحو سطح الأرض .

ونستنتج من هذا أن الأرض تؤثر فى جميع الأجسام بقوة جاذبة تسمى بقوة التثاقل . ومقدار تأثيرها فى جسم معين يسمى ثقل الجسم ويجب فى هذا المقام أن يميز الطالب كتلة الكيلوجرام من ثقله .

فكتلة الكيلوجرام عبارة عن كمية المادة التى تساوى كمية معينة منها ولا تعلق لها بالقوى . أما ثقل الكيلوجرام فهو عبارة عن القوة التى بها تجذب كتلة الكيلوجرام نحو سطح الأرض . ومن المعتاد أن تقدر القوة بكذا من الكيلوجرامات فنفهم من ذلك ان القوة تعادل ثقل كذا من الكيلوجرامات وعند استعمال اللفظ "كيلوجرام" يجب على الطالب أن يعين من السياق هل هو يدل على كتلة الكيلوجرام أو على القوة التى تعادل ثقل الكيلوجرام .

اذا أخذنا جسمين كريشة وقطعة من النقود ثم أسقطناهما فى آن واحد نشاهد أنهما لا يصلان الى الأرض معا بل تصل القطعة النقدية اليها فى زمن أقل بكثير مما تستغرقه الريشة . ونعلم بالتجربة أن هذا ليس ناشئا من الفرق بينهما فى الحجم أو الشكل أو المادة وانما هو ناشئ من وجود الهواء .

ولاثبات هذا نسقط قطعة من الريش مع جنيه فى آن واحد من أعلى أنبوبة زجاجية رأسية قد فرغت من الهواء بمضخة هوائية فيشاهد أن الجنيه وقطعة الريش سقطا جنبا الى جنب ووصلا الى أسفل الأنبوبة فى وقت واحد وما يسرى على الجنيه وقطعة الريش يسرى أيضا على غيرهما من الأجسام . حتى انه اذا كان الهواء غير موجود وسقطت أجسام كثيرة مهما كانت حجومها وكتلها وكثافاتها من ارتفاع واحد فى آن واحد فانها تهبط جميعا جنبا الى جنب عمودية وتصل الى أى مستو أفقى فى لحظة واحدة .

ومن ذلك نستنتج أن هذه الأجسام لابد أن تكون ساقطة فى كل لحظة بسرعة واحدة فتكون ساقطة بعجلة واحدة .

ونرى فى ذلك مثالا لأجسام مختلفة تتحرك بعجلة واحدة فمن بند ٣٤ يلزم أن تكون القوة التى تؤثر فى كل جسم منها مناسبة لكتلته ثم أن القوة التى تؤثر فى كل جسم هى ثقله . فمن تجربة الجنيه وقطعة الريش نعلم أن أثقال الأجسام تتناسب مع كتلها عند ما تكون الأجسام فى موضع واحد من سطح الأرض .

ومن المعتاد فى الديناميكا أن نرمز بالرمز ء الى العجلة الناشئة من التثاقل فى حركة الجسم الساقط فى فراغ خال من الهواء .

وقد ثبت نظريا وعمليا أن قيمة ء تختلف باختلاف الجهات على سطح الارض . فأصغر قيمة لها عند خط الاستواء . وتزداد كلما سرنا منه مقتربين من أحد القطبين .

والفرق بين قيمتها عند خط الاستواء وقيمتها عند القطب يساوى بالتقريب $\frac{١}{٢٠٠}$ من قيمتها عند خط الاستواء .

والتغير فى قيمتها قليل جدا فى مساحة من سطح الكرة الأرضية كساحة الجزر البريطانية وتعتبر عادة قيمتها ٩٨١ بالسنتيمترات والثوانى ، ٣٢ بالأقدام والثوانى وسنعتبر فى جميع أحوال الحركة التى نبحث فيها أن الجسم يتحرك فى فراغ خال من الهواء مالم نذكر غير ذلك . فلا حاجة لاعتبار وجود الهواء .

اذا رمزنا بالرمز ك الى كتلة جسم وبالرمز ء الى عجلة التثاقل فى نقطة معلومة فان ثقل الجسم فى تلك النقطة يكون بمقتضى بند (٣٧)

ك ء مقدرا بالوحدات المطلقة

وينتج أن ثقل كتلة معلومة يتناسب مع عجلة التثاقل فى النقطة التى يقدر فيها ذلك الثقل .

بند ٣٩ — الوحدات التثاقلية للقوة .

الوحدة التثاقلية للقوة هى وحدة تعتبر ثقلا لوحدة معلومة من الكتلة ككتلة الجرام أو كتلة الباوند .

وقد رأينا فى البند السابق أن أى وحدة تثاقلية ليست ثابتة لأنها تختلف باختلاف عجلة التثاقل .

فمثلا ثقل جسم معين فى القطب يزيد عن ثقله فى خط الاستواء مقدار $\frac{١}{٢٠٠}$

يجب على الطالب أن يلاحظ أن الفرق بين ثقلى كتلة معينة فى نقطتين مختلفتين من سطح الأرض لا يمكن ايجاده بميزان معتاد .

ففى الميزان المعتاد تتزن كتلة موضوعة فى احدى كفتيه مع كتلة تساويها موضوعة فى الكفة الأخرى مهما كانت عجلة التثاقل .

ولكنه يمكن تعيين الفرق بميزان نابضى (زنبلكى) فيه يَجذِبُ الجسمُ المراد ايجاد ثقله نابضا .

فمن الواضح أنه كلما عظم ثقل الكتلة زاد طول النابض أى كلما زاد الثقل الذى يبينه الميزان .

وكثيرا ما يكون من الضرورى فى الديناميكا أن نعبّر عن ثقل كتلة معينة فى نقطة معينة بالوحدات المطلقة . لذلك نحتاج الى معرفة قيمة عجلة التثاقل فى تلك النقطة فمن البند السابق يكون ثقل الكتلة ك هو ك ء بالوحدات المطلقة . فلتقدير ثقل الكتلة ك بالوحدات المطلقة نضربها فى ء أى لتحويل وحدات تثاقلية الى وحدات مطلقة نضرب الأولى فى العدد الدال على ء . أما اذا أردنا تحويل وحدات مطلقة الى وحدات تثاقلية فنقسم الأولى على العدد الدال على ء

وتستعمل الوحدات المطلقة فى الكهربائية والفلك على الخصوص .

ومع أن ثقل الكيلوجرام غير ثابت نراه يتغير قليلا جدا بانتقاله من نقطة الى أخرى على سطح الأرض . ولذا يتخذ وحدة للقوة فى كثير من التطبيقات العملية للديناميكا .

(مثال ١) درج ميزان نابضى فى لوندره . فما الوزن الحقيق لجسم وجد ثقله فى أدنبرج ١١٥ كيلوجراما به علما بأن عجلة التثاقل بالوحدات الفرنسية = ٩٨١,١٧ فى لوندره ، ٩٨١,٥٤ فى ادنبرج .

ثقل كتلة معينة يتناسب تناسبا طرديا مع عجلة التثاقل فيكون

$$\frac{\text{ثقل الكتلة فى لندره}}{\text{ثقل الكتلة فى ادنبرج}} = \frac{٩٨١,١٧}{٩٨١,٥٤}$$

$$\therefore \text{ثقل الكتلة فى لوندره} = \frac{١١٥ \times ٩٨١,١٧}{٩٨١,٥٤}$$

$$= ١١٤,٩٦ \quad \text{تقريبا}$$

ومن حيث ان الميزان قد درج فى لوندره فثقل الكيلوجرام فيها هو وحدة الثقل . ولكون ثقل الجسم فى لوندره ١١٤,٩٦ تكون كتلته ١١٤,٩٦ من الكيلوجرامات .

(مثال ٢) قوة معينة تساوى ٩٥٣ باوندالا فما مقدارها بثقل الباوند فى جلاسجو حيث تكون ء = ٣٢,٢ بالوحدات الانجليزية ؟

من حيث ان عجلة التثاقل فى جلاسجو ٣٢,٢ يكون ثقل الباوند فيها ٣٢,٢ من الباوندالات .

$$\text{اذن القوة ٩٥٣ باوندالا} = \frac{٩٥٣}{٣٢,٢}$$

$$= ٢٩,٦ \quad \text{ثقل الباوند فى جلاسجو}$$

بند ٤٠ — القانون الثالث .

لكل فعل رد فعل .

يقصد بكلمة فعل فى هذا القانون القوة التى بها يضغط جسم جسما آخر أو يجذبه أو يطرده أو يجره . ويفيد ذلك القانون أن الجسم الثانى يضغط أو يجذب أو يطرد أو يجر الجسم الأول بقوة مساوية تلك القوة ونمثل بالأمثلة الآتية :

(١) اذا ضغط شخص بيده منضدة بقوة رأسية الى أسفل فانها تضغط يده بقوة رأسية الى أعلى مساوية القوة التى يضغط هو بها .

(٢) الشمس تجذب كوكبا بقوة معينة كذلك هو يجذبها بقوة تساوى تلك القوة . ومن حيث ان كتلة الشمس كبيرة جدا بالنسبة الى كتلة الكوكب فتأثير قوة جذبه لها ضعيف جدا بالنسبة الى قوة جذبها له .

(٣) الكرتان اللتان من نخاع البيلسان المشحونتان بنوع واحد من الكهربائية تطرد كل منهما نظيرتها بقوة تساوى قوتها .

(٤) فى مباراة شد الحبل يكون مقدار التوتر فى الحبل بين الفريقين هو القوة المؤثرة فى كل منهما . اذن أحد الفريقين يجر الآخر بنفس القوة التى يجره هو بها . والفريق الفائز يتغلب لأن المقاومة التى يبديها أكبر مما يبديها الآخر .

بند ٤١ — يمكن اعتبار أن قوانين الحركة مستنبطة من المشاهدات والتجارب وأقوى أسباب التصديق بصحة قوانين الحركة سبب استنتاجى .

فعلم الفلك الطبيعى مبنى على علم الديناميكا وهذا مبنى على قوانين الحركة الثلاثة . ومواقع الشمس والقمر بين النجوم وهى التى قد حسبها علماء الفلك الطبيعى منذ زمن طويل يحققها الآن رصد الراصدين على اليابسة والبحار .

فما لايعقل أن تكون الحسابات الكثيرة المركبة مطابقة للشاهدات إلا اذا كانت القوانين التى بنيت عليها تلك الحسابات مضبوطة تمام الضبط .

(تمارين ١٠)

[تنبيه – فى المسائل الآتية اعتبر أن قيمة ء هى ٣٢,٢ بالأقدام والثوانى ، ٩٨١ بالسنتيمترات والثوانى] .

(١) ما مقدار القوّة التى اذا أثرت فى قاطرة سكة حديدية كتلتها ١٥ طونولاتة مدة ١١ دقيقة أكسبتها سرعة قدرها ٣٣ كيلومترا فى الساعة ؟ (تقدر القوّة بالداينات وأيضا بثقل الكيلوجرام) .

(٢) اذا أثرت قوة ١٠٠٠ داين فى جسم كتله جرام واحد من أسفل الى أعلى ولم يزل ذلك الجسم تحت تأثير التثاقل فما مقدار عجلته ؟

(٣) قام قطار من محطة بعجلة منتظمة قدرها متران فى الثانية فى الثانية .

قارن بين شدّ الروابط التى بين القاطرة والعربة الأولى وثقل العربات جميعها .

(٤) يتحرك جسم كتلته ك تحت تأثير قوة واحدة فاذا كانت عجلته ١٣٥ سنتيمترا فى الثانية فى الثانية فأوجد مقدار تلك القوّة بالداينات وقارنها بثقل الجسم .

(٥) يتأثر جسم بقوّة تساوى ربع ثقله . أوجد المسافة التى يقطعها فى مدّة ٣ ثوان والسرعة التى يكون قد اكتسبها فى نهاية تلك المدة .

(٦) اذا أمكن نقص كتلة الجسم بدون أن يحصل تغير فى ثقله فبين مايكون تأثير ذلك فى عجلته عند مايسقط بتأثير التثاقل .

(٧) جسم كتلته ٢٠ باوندا متحرك بسرعة ٤٠ قدما فى الثانية أوقفته مقاومة ثابتة بعد ماقطع ٤٠٠ قدم . أوجد مقدار المقاومة بالپاوندال و بثقل الپاوند .

(٨) أدلى قفص فى منجم بعجلة قدرها ١٦ قدما فى الثانية فى الثانية . فاذا كانت كتلة القفص طنا واحدا فما مقدار شدّ الحبل بالپاوندال ؟ واذا كان جسم كتلته ١٠ باوندات على قعر القفص فما ضغطه عليه ؟

الباب الرابع

القواعد العامة للاستاتيكا

بند ٤٢ — اختصاص الاستاتيكا .

رأينا أنه اذا أثرت قوة فى جسم فانها تعمل على تحريكه . وهناك أحوال كثيرة فيها يُمنع الجسم من الحركة وهو تحت تأثير قوة لتأثير قوة أخرى أو أكثر فيه . ففى مثل هذه الأحوال تؤثر قوتان أو أكثر فى جسم ولا يزال ساكنا . ويتعلق البحث فى هذه الأحوال بالاستاتيكا وهو علم توازن القوى .

ويحسن أن نقسم مسائل علم الاستاتيكا قسمين :

فالقسم الأول يتعلق به تلك المسائل التى فيها تمر اتجاهات جميع القوى بنقطة فى الجسم. وفى بعض مسائل هذا القسم يكون الجسم التى تؤثر فيه القوى صغيرا جدا حتى يمكن عدم الاعتداد بحجمه . ومثل هذا الجسم يشبه النقطة الرياضية فى أن لها وضعا مجردا من الطول والعرض . ولكنه يختلف عن النقطة الرياضية فى أن له كتلة فيكون من خواصه تأثير القوة فيه . ويسمى بالنقطة المادية .

ويخص هذا القسم نفسه من المسائل الاستاتيكية ما تكون فيها الأجسام ذات حجم يمكن ادراكه ولكن تكون اتجاهات جميع القوى مارة بنقطة واحدة .

والقسم الثانى من مسائل الاستاتيكا يبحث فى تأثير القوى التى لاتمر بنقطة واحدة فى أجسام ذات حجوم يمكن ادراكها .

وسنعتبر دائما فى المسائل التى تتعلق بتأثير القوى فى أجسام محدودة الحجم أن هذه الأجسام تامة الصلابة أى لايتغير شكلها ولا حجمها بتأثير القوى فيها .

ومن حيث انه لايوجد جسم تام الصلابة فعلم الديناميكا مبنى على فرض نظرى ولذا نسميه أحيانا الديناميكا النظرية .

لحل المسائل الذى يتوقف على قواعد الديناميكا النظرية تقريب أولى للحل الحقيق الذى لايمكن تحصيله إلا باعتبار ماينشأ عن القوى من تشويه الأجسام التى تؤثرفيها .

ويسمى العلم الذى يبحث فى تأثير القوى من حيث تغير شكل الأجسام أو حجمها علم المـــرونة .

بند ٤٣ — معينات القـــوة .

تتعين القوة تعينا تاما اذا علم :

(أولا) مقدارها . (ثانيا) اتجاهها . (ثالثا) نقطة تأثيرها .

بند ٤٤ — تمثيل القوى بالخطوط المستقيمة .

القوة كالسرعة والعجلة يمكن تمثيلها بخط مستقيم لأنه يمكننا رسم المستقيم من نقطة نعتبرها نقطة تأثير القوة كما يمكننا رسم المستقيم فى اتجاه القوة وجعله محتويا على وحدات اختيارية من الطول يساوى عددها عدد وحدات القوة المعلومة فاذا كان لدينـا أكثر من قوة أمكن تمثيل كل منهـا بمستقيم يرسم مناسبا لها ولا يكون تعيين اتجاه القوة تاما اذا علم المستقيم الذى ينطبق عليه اتجاه القوة فقط بل يجب معرفة الاتجاه نفسه . مثلا اذا كان ا ب مستقيما وجب تمييز الاتجاه ا ب من الاتجاه ب ا . فان قلنا ان قوة تعمل فى الاتجاه ا ب دل ذلك على أن اتجاه عملها من ا الى ب . وإن قلنا إن قوة تعمل فى الاتجاه ب ا دل ذلك على أن اتجاه عملها من ب الى ا . ويستعمل فى الرسم رءوس سهام لتعين اتجاه القوة فى مستقيم ما .

بند ٤٥ — الأنواع المختلفة للقوة .

نجد فى مسائل الاستاتيكا الابتدائية نوعا أو أكثر من أنواع القوة التـالية :

(١) أثقال الأجسام الناشئة من تأثير جذب الأرض لها . ويتجه هذا التأثير عموديا الى أســفل .

(٢) ضغط جسمين متلامسين أحدهما للآخر .

(٣) التوتر أو الشدّ فى حبل ممدود .

بند ٤٦ — المحصلة والمعادلة .

اذا أثرت مجموعة من القوى فى جسم وأمكن ايجاد قوة واحدة تعمل عملها سميت تلك القوة الواحدة محصلة المجموعة .

اذا أثرت مجموعة من القوى فى جسم وأمكن إيجاد قوة واحدة تعمل مع هذه المجموعة فتبقى الجسم ساكنا سميت تلك القوة الواحدة معادلة المجموعة .

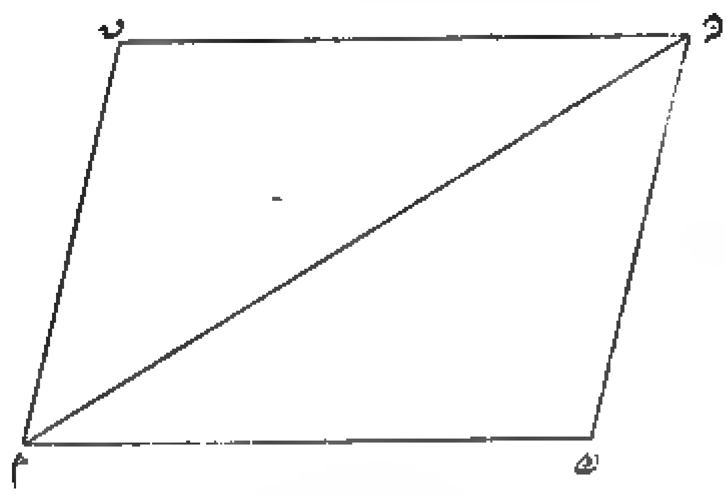
١

القوى التى فى مستو واحد مارة بنقطة واحدة .

بند ٤٧ — متوازى الأضلاع للقوى .

القوى كالسرع والعجلات يسرى عليها قانون متوازى الأضلاع . فهناك نظرية تناظر متوازى الأضلاع للسرع ومتوازى الأضلاع للعجلة . وتعرف بمتوازى الأضلاع للقوى وهى :

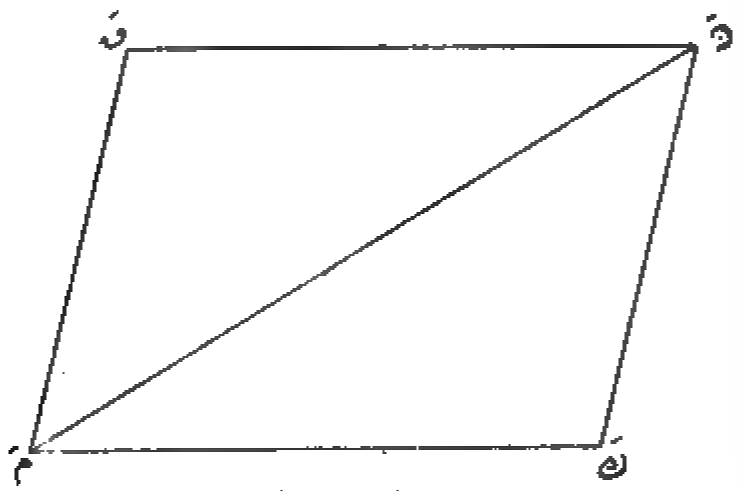
اذا أثرت قوتان فى نقطة مادية موضعها م وكان يمثلهما فى المقدار والاتجاه المستقيمان م ك ، م ں ثم أكمل متوازى الأضلاع م ك د ں كانت محصلة القوتين قوة يمثلها فى المقدار والاتجاه القطر م د الذى يمر بالنقطة م .



وتنتج هذه النظرية من متوازى الأضلاع للسرع وقانون الحركة الثانى لنيوتن .

نرسم الشكل مَ كَ دَ ںَ ممثلا للسرع وفيه مَ كَ ، مَ ںَ يمثلان التغيرين فى السرعة اللذين تحدثهما فى وحدة الزمن القوتان م ك ، م ں

فمن متوازي الأضلاع للسرع نرى أن محصلة التغير فى السرعة يمثلها مَ دَ فيكون مَ دَ دالا على محصلة التغير فى السرعة أثناء وحدة الزمن الناشئ من تأثير القوتين اللتين يمثلهما م ك ، م ى ولكن من قانون الحركة الثانى لنيوتن نعلم أن القوى توازى وتناسب التغيرات فى السرعة التى تحدثها فى وحدة الزمن .



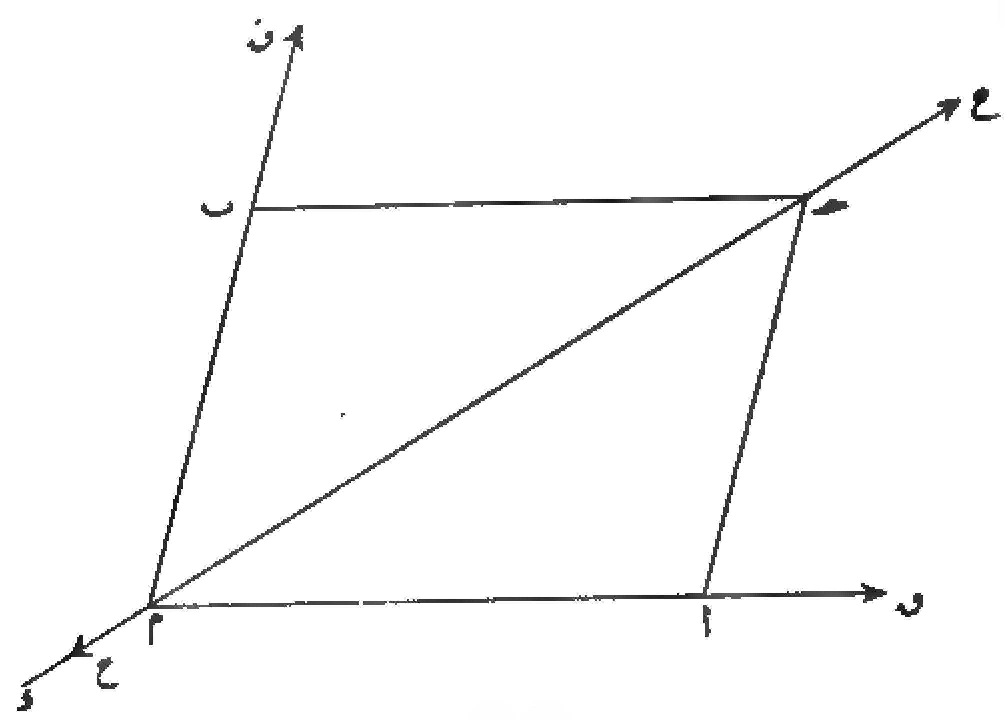
(شــكل ١٧)

فالمستقيمان م ك ، م ى والمستقيم الذى يمثل المحصلة توازى وتناسب مَ كَ ، مَ دَ ، مَ ىَ على التناظر .

ومن ذلك نستنتج أن المستقيم الذى يمثل المحصلة فى الشكل الممثل للقوى هو المستقيم الذى يناظر مَ دَ فى الشكل الممثل للسرع وواضح أن ذلك المستقيم هو م د قطر متوازى الأضلاع م ك د ى .

بنـد ٤٨ — المعادلة لقوتين تؤثران فى نقطة مادية .

رأينا أن محصلة القوتين ى ، ىَ اللتين يمثلهما م ا ، م ب قوة واحدة هى ح يمثلها م حـ . ويتسنى لنا حينئذ أن نفرض أن ى ، ىَ قد استعيض عنهما القوة ح



ولا تكون المعادلة للقوة ع إلا قوة تساوى ع وتؤثر فى م آخذة الاتجاه م ى الذى يضاد م حـ . لأنه على حسب متوازى الأضلاع للقوى اذا فرضت قوة فى أى اتجاه غير م ى فانها تتركب مع أى قوة فى الاتجاه م حـ ويكون لها محصلة ومن ذلك ينتج أن المعادلة لا بد أن يكون اتجاه تأثيرها م ى وبديهى أنها تساوى ع .

وحينئذ نقول إن المعادلة لقوتى ں ، ں َ قوة هى ع تساوى محصلتهما فى المقدار وتضادها فى الاتجاه . فاذا تأثرت النقطة المادية م بالقوى الثلاث ں فى الاتجاه م ا ، ں َ فى الاتجاه م ب ، ع فى الاتجاه م ى فانها تبقى ساكنة ويعبر عن ذلك أحيانا بأن القوى الثلاث فى حالة التوازن .

بند ٤٩ — مثلث القوى ومضلع القوى .

من حيث ان القوى يسرى عليها قانون متوازى الأضلاع فكل نتائج ذلك القانون التى فى البنود (١٩ — ٢٤) تبقى صحيحة اذا استعيض فيها اللفظ قوة عن اللفظ سرعة فيكون لدينا نظريتان تعرفان بنظريتى مثلث القوى ومضلع القوى وهاتان تناظران مثلث السرع ومضلع السرع .

أما مثلث القوى فهو :

اذا أثرت ثلاث قوى فى نقطة مادية ومثلها فى المقدار والاتجاه أضلاع مثلث مأخوذة على الترتيب فان تلك القوى تكون فى حالة التوازن .

ويمكن إثبات ذلك إثباتا قائما برأسه كما يأتى :

نرى فى الشكل الممثل للقوى بالبند السابق أن القوى ں (فى الاتجاه م ا) ، ں َ (فى الاتجاه م ب) ، ع (فى الاتجاه م ى) متوازنة . ولكن يمثلها فى المقدار والاتجاه م ا ، م ب ، م ى (الذى يساوى م حـ) أو يمثلها م ا ، ا حـ ، حـ م (لأن ا حـ يساوى م ب ويوازيه) .

فالقوى الثلاث التى يمثلها فى المقدار والاتجاه الأضلاع الثلاث م ا ، ا حـ ، حـ م للمثلث م ا حـ تجعل النقط المادية فى حالة السكون .

ومضلع القوى هو :

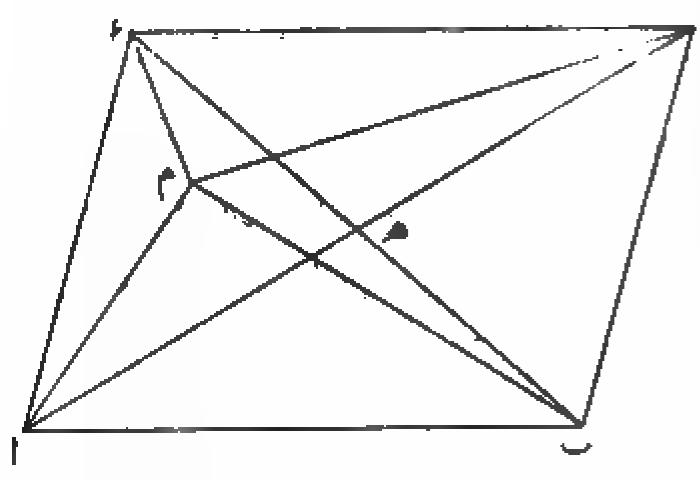
اذا أثرت جملة قوى فى نقطة مادية ومثلها فى المقدار والاتجاه أضلاع مضلع مقفل مأخوذة على الترتيب فان تلك القوى تكون فى حالة التوازن .

واذا لم تكون المستقيمات التى تمثل القوى مضلعا تاما فان محصلة القوى يمثلها المستقيم الواصل بين النقطة المادية ونهاية آخر ضلع من المضلع غير المقفل .

وتمكننا هذه النظرية من تحصيل أى عدد من القوى التى تمر بنقطة واحدة بالرسم كما أنها تمكننا من اختبار توازنها .

(مثال ١) من نقطة م رسمت مستقيمات تنتهى برؤس متوازى الأضلاع ا ب حـ ء فاذا مثلث المستقيمات م ا ، م ب ، م حـ ، م ء أربع قوى تؤثر فى م فأثبت أن محصلتها تمر بنقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع . ثم أوجد مقدار تلك المحصلة .

اذا أخذنا القوتين اللتين يمثلهما فى المقدار والاتجاه م ا ، م حـ نجد محصلتهما بإكمال متوازى الأضلاع الذى يكون فيه م ا ، م حـ ضلعين متجاورين ورسم القطر المار بالنقطة م . وهذا القطر يمر بالنقطة هـ التى تنصف القطر الآخر ا حـ ويكون مساويا ضعف م هـ .



فمحصلة القوتين اللتين يمثلهما م ا ، م حـ قوة يكون اتجاهها م هـ ويمثلها مستقيم طوله ضعف م هـ . وكذا نجد أن محصلة القوتين اللتين يمثلهما م ب ، م ء قوة يكون اتجاهها م هـ ويمثلها فى الطول مستقيم طوله ضعف م هـ .

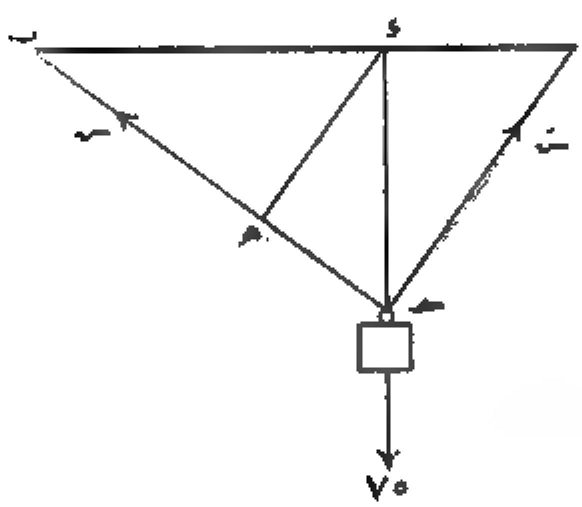
ومن ذلك تكون محصلة القوى كلها التى يمثلها م ا ، م ب ، م حـ ، م ء قوة اتجاهها م هـ يمثلها مستقيم يساوى طوله أربعة أمثال طول م هـ .

(مثال ٢) أثبت أن ثلاث القوى التي تمثلها الأعداد ٢ ، ٤ ، ٨ لا يمكن أن تتوازن .

لا تتوازن ثلاث قوى إلا اذا تناسبت مع أضلاع مثلث ما . ولا يوجد مثلث تتناسب أضلاعه مع الأعداد ٢ ، ٤ ، ٨ وإلا كان ضلعان منه وهما اللذان يناسبان العددين ٢ ، ٤ أصغر من الضلع الثالث . وهذا مستحيل .

(مثال ٣) علق جسم ثقله ٧٥ كيلوجراما من مسمارين في مستو أفقي بخيطين طول أحدهما ٣٠ سنتيمترا والآخر ٤٠ سنتيمترا .

فاذا كانت المسافة بين المسمارين بحيث يكون الخيطان متعامدين فأوجد مقدار شدّ كل منهما .



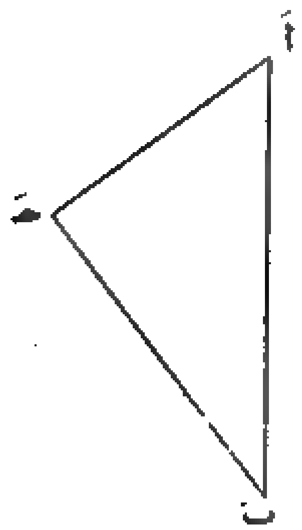
ليكن ا ، ب موضعى المسمارين ، حـ موضع الجسم فنعتبر في هذه المسألة أن الجسم نقطة مادية . نفرض أن المستقيم الرأسى الذى يمرّ بالنقطة حـ يقابل المستقيم ا ب في ء ثم نرسم ء هـ عمودا على ب حـ

فمن حيث ان طول الخيط القصير ا حـ ٣٠ سنتيمترا وطول الخيط الطويل ب حـ ٤٠ سنتيمترا ينتج أن طول الوتر ا ب ٥٠ سنتيمترا .

القوى التي تؤثر في الجسم هي ثقلها الذى يؤثر الى أسفل وقوة شدّ الخيط الطويل حـ ب ولتكن ش وقوة شدّ الخيط القصير حـ ا ولتكن شَ فالمطلوب إيجاد ش ، شَ من حيث ان القوى الثلاث وهى الثقل وقوتا الشدّ متوازنة فلا بد أن تتناسب مع أضلاع أى مثلث توازى أضلاعه اتجاهات القوى .

فلو رسمنا المثلث آ بَ حَ الذى توازى أضلاعه القوى يحدث شكل فيه آ بَ يمثل الثقل (٧٥ كيلوجراما) ، بَ حَ يمثل قوة شدّ الخيط ب حـ وهى (ش) ، حَ آ يمثل قوة شدّ الخيط حـ ا وهى (شَ) .

ومن ذلك يكون :



$\frac{\text{ش}}{٧٥} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{آ بَ}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ ء}}$ (لأن أضلاع المثلث ء حـ هـ توازى أضلاع المثلث آ بَ حَ)

$= \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}}$ (لأن المثلثين ء حـ هـ ، ا ب حـ متشابهان)

$= \frac{٣}{٥}$

ومنه ش = ٤٥ كيلوجراما .

وكذا نجد أن شَ = ٦٠ كيلوجراما .

فقوة شدّ الخيط الطويل تعادل وزن ٤٥ كيلوجراما وقوة شدّ الخيط القصير تعادل وزن ٦٠ كيلوجراما .

(تمارين ١١)

(١) ا ب ء حـ متوازى الأضلاع وقد نصف ا ب فى هـ . أثبت أن محصلة القوتين ا ء ، ا حـ ضعف محصلة القوتين ا هـ ، ا حـ .

(٢) إذا أثرت أربع قوى فى نقطة مادية وقد مثلها فى المقدار والاتجاه الاضلاع ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ا ء من الشكل الرباعى ا ب حـ ء فما محصلتها ؟

(٣) ا ب حـ ء شكل رباعى . أثبت أن القوى التى يمثلها فى المقدار والاتجاه ا حـ ، حـ ب ، ب ء ، ء ا وقد أثرت فى نقطة واحدة متوازنة .

(٤) تؤثر أربع قوى فى نقطة واحدة ويمثلها فى المقدار والاتجاه الأضلاع ا ب ، ا ء ، حـ ب ، حـ ء من متوازى الأضلاع . أثبت أن هذه القوى متوازنة .

(٥) اذا أثرت جملة قوى فى نقطة ثم زادت كل قوة من الجملة بنسبة واحدة فأثبت أن محصلتها تزيد بنفس النسبة .

(٦) اذا أثرت جملة قوى فى نقطة وكانت متوازنة ثم زادت كل قوة من الجملة بنسبة واحدة فأثبت أن الجملة لاتزال متوازنة .

(٧) تؤثر قوى قدرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ في مركز مسدس منتظم متجهة نحو رءوسه أ ، ب ، حـ ، ى ، هـ ، و . أوجد محصلتها .

(٨) كيف توضع ثلاث قوى مؤثرة في نقطة وقدرها ٧ ، ١٠ ، ٣ حتى تتزن .

(٩) خيطان متساويا الميل على الخط الرأسي . يصنع أحدهما مع الآخر زاوية قائمة . فاذا عُلق من نقطة تلاقيهما جسم ثقله ١٠٠ كيلوجرام فما مقدار الشدّ في كل منهما ؟

(١٠) خيط طوله ٢٦ سنتيمترا ربط طرفاه بنقطتين في مستوٍ أفقي وكان البعد بينهما ٢٤ سنتيمترا وعُلق جسم ثقله ٥٠ جراما في منتصف الخيط . أوجد مقدار الشدّ في الخيط .

(١١) عُلق جسم ثقله ١٠ كيلوجرامات في طرف خيط مثبت طرفه الآخر . ما مقدار القوّة الأفقية التي اذا أثرت في هذا الجسم جعلت الخيط يميل على الخط الرأسي بزاوية قدرها ٥٠° ؟

بنـد ٥٠ — قوانين جبرية .

من حيث ان القوى تسرى عليها قاعدة متوازى الأضلاع فالقوانين التي ذكرناها للسرع في بندى ١٩ ، ٢٠ تنطبق على القوى أيضا . فاذا دلت $ق_١$ ، $ق_٢$ على قوتين تؤثران في نقطة مادية ويصنع اتجاه احداهما مع اتجاه الأخرى زاوية و وكانت ع تدل على محصلتهما فان $ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتا } و}$

واذا دلّت هـ على الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة $ق_١$ يكون

$$\text{ظا } هـ = \frac{ق_٢ \text{ جا } و}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتا } و}$$

وفي الحالة الخاصة وهي ما تكون فيها القوتان متعامدتين يكون و = ٩٠° فيكون جتا و = صفرا ، جا و = ١ فتستخرج محصلة القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ المتعامدتين من القانون $ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

كذلك تستخرج قيمة الزاوية هـ التي تصنعها المحصلة مع اتجاه القوة $ق_١$ من القانون .

$$\text{ظا } هـ = \frac{ق_٢}{ق_١}$$

(مثال ١) اذا أثرت قوتان متعامدتان يمثلهما العددان ١٢ ، ٥ فى نقطة فأوجد محصلتهما وجيبى الزاويتين اللتين تصنعهما مع كل من مركبتيهما .

$$\text{هنا } ق_١ = ١٢ ، ق_٢ = ٥ ، و = ٩٠^\circ$$

$$\text{فيكون } ح = \sqrt{١٢^٢ + ٥^٢} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$$

$$\text{، ظا هـ } = \frac{ق_٢}{ق_١} = \frac{٥}{١٢}$$

$$\text{ومنه جا هـ } = \frac{٥}{١٣} \text{ ، جتا هـ } = \frac{١٢}{١٣}$$

اذن مقدار المحصلة هو ١٣ وجيبا الزاويتين اللتين تصنعهما مع $ق_١$ ، $ق_٢$ ، جا هـ وجتا هـ هما $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ على التناظر .

(مثال ٢) اذا أثرت القوتان ٢٧ كيلو جراما ، ٦٣ كيلو جراما فى نقطة مادية وكان ميل أحداهما على الأخرى زاوية جيب تمامها $-\frac{١١}{١٤}$ فما محصلتهما ؟

$$\text{هنا } ق_١ = ٢٧ ، ق_٢ = ٦٣ ، \text{جتا و} = -\frac{١١}{١٤}$$

$$\text{فيكون } ح^٢ = ٢٧^٢ + ٦٣^٢ + ٢ \times ٢٧ \times ٦٣ \times \left(-\frac{١١}{١٤}\right)$$

$$= ٢٠٢٥$$

و بأخذ الجذر نجد أن المحصلة ح = ٤٥ كيلو جراما .

(مثال ٣) محصلة قوتين متساويتين تؤثران فى نقطة وتميل إحداهما على الأخرى بزاوية قدرها ٦٠° هى ٩٠ كيلوجراما فما مقدار كل من مركبتيها ؟

نرمز الى مقدار احدى المركبتين بالرمز ق .

فبوضع ق = قَ ، و = ٦٠° ، ح = ٩٠ فى قانون ايجاد المحصلة نجد أن

$$ق^٢ + ق^٢ + ٢ ق^٢ \text{ جتا } ٦٠^\circ = ٩٠^٢$$

$$\text{ومنه } ٣ ق^٢ = ٩٠^٢$$

$$\text{أو } ق^٢ = ٢٧٠٠$$

وبأخذ الجذر تكون ق = $٣٠ \sqrt{٣}$ من الكيلوجرامات .

(تمارين ١٢)

(١) قوتان قدرها ٣ ، ٥ فاذا كانت محصلتهما ٧ فما الزاوية بينهما ؟

(٢) أوجد محصلة قوتين قدرها ٦٠ ، ٩١ كيلو جراما . والزاوية بينهما قائمة .

(٣) قوتان قدرها ١٤٣ ، ١٢٠ كيلو جراما والزاوية بينهما ١٢٠° أوجد محصلتهما

(٤) الزاوية بين قوتين ٦٠° فاذا كانت إحدى القوتين ٥٦ كيلو جراما ومحصلتهما ١٥١ كيلو جراما فما القوة الأخرى ؟

(٥) ثلاث قوى قدرها ١,٥ ، ٢ ، ٢,٥ من الجرامات تؤثر فى نقطة فاذا كانت متوازنة فما الزاوية التى بين القوتين الأوليين ؟

(٦) قوتان كل منهما تساوى ق تؤثران فى نقطة والزاوية بينهما تساوى هـ أثبت أن محصلتهما تساوى ٢ ق جتا $\frac{هـ}{٢}$

(٧) تؤثر قوتان متساويتان فى نقطة فاذا كانت محصلتهما ثابتة مقدارا واتجاها فما المحل الهندسى لطرف المستقيم الذى يمثل إحدى القوتين ؟

(٨) اذا أثرت القوتان ق ، ٢ ق فى نقطة وكانت الزاوية بينهما ١٢٠° فأوجد مقدار محصلتهما واتجاهها .

(٩) اذا علمت قوتان فماذا تكون الزاوية بينهما حتى تكون محصلتهما

(أولا) أصغر ما يمكن و (ثانيا) أكبر ما يمكن ؟

(١٠) أثبت هندسيا أو بالطريقة الجبرية أن محصلة قوتين تنقص بازدياد الزاوية بينهما ما النهاية الكبرى والنهاية الصغرى للمحصلة ؟

(١١) اذا عُلق صندوق بحبل مربوط فى مقبضيه فأثبت أن مقدار شد الحبل ينقص بازدياد طول الحبل .

(١٢) قوتان الزاوية بينها ٦٠° ومحصلتهما تقسمها بنسبة ٣ : ١ فاذا كانت القوة الصغرى ٨ كيلو جرامات فأوجد الكبرى علما بأن جا ١٥° = ٠,٢٥٩

(١٣) اذا أثرت القوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ فى نقطة مادية (أولا) عندما تكون الزاوية بينهما ٦٠° ، (ثانيا) عندما تكون الزاوية بينهما ١٢٠° وكانت $ح_١$ ، $ح_٢$ المحصلتين فى الحالتين فاثبت أن

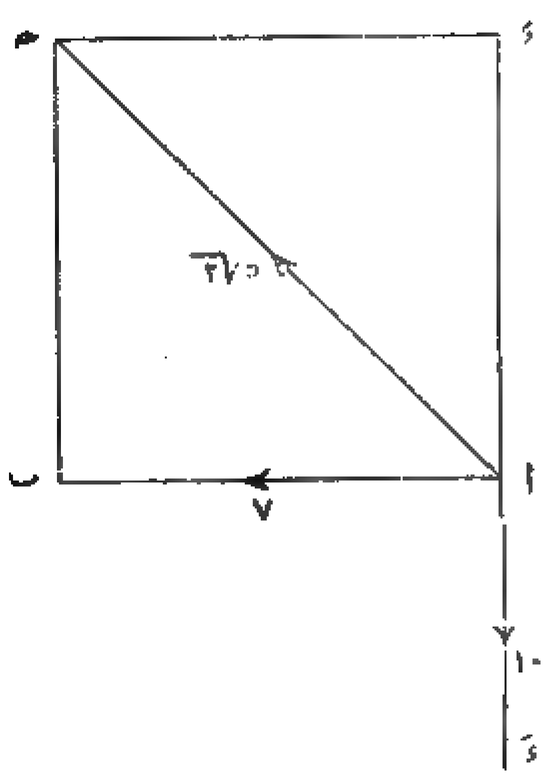
$$ح_١^٢ + ح_٢^٢ = ٢ (ق_١^٢ + ق_٢^٢)$$

بند ٥١ — طريقة جبرية لايجاد محصلة أى عدد من القوى التى تؤثر فى نقطة .

من حيث ان القوى يسرى عليها قانون متوازى الأضلاع ينتج أن طريقة تحليل السرعة الى مركبتين التى أوضحناها فى بندى ٢٢ ، ٢٣ تستعمل أيضا فى تحليل القوى .

فمثلا اذا كانت ق مقياسا لقوة ما وكانت ى الزاوية التى يصنعها اتجاه تلك القوة مع اتجاه معين فان مركبة القوة فى ذلك الاتجاه تكون ق جتا ى والمركبة فى الاتجاه العمودى عليه ق جا ى

وتستعمل أيضا فى القوى الطريقة الجبرية المستعملة فى إيجاد مقدار واتجاه محصلة أى عدد من السرع وقد أوضحناها فى بند (٢٤) .



(مثال ١) ا ، ب ، حـ ، ى رءوس مربع مأخوذة على الترتيب . أوجد محصلة ثلاث القوى الآتية :

٧ من ا الى ب ، ١٠ من ى الى ا ، ٥ √٢ من ا الى حـ

نأخذ الاتجاهين المتعامدين ا ب ، ا ى َ

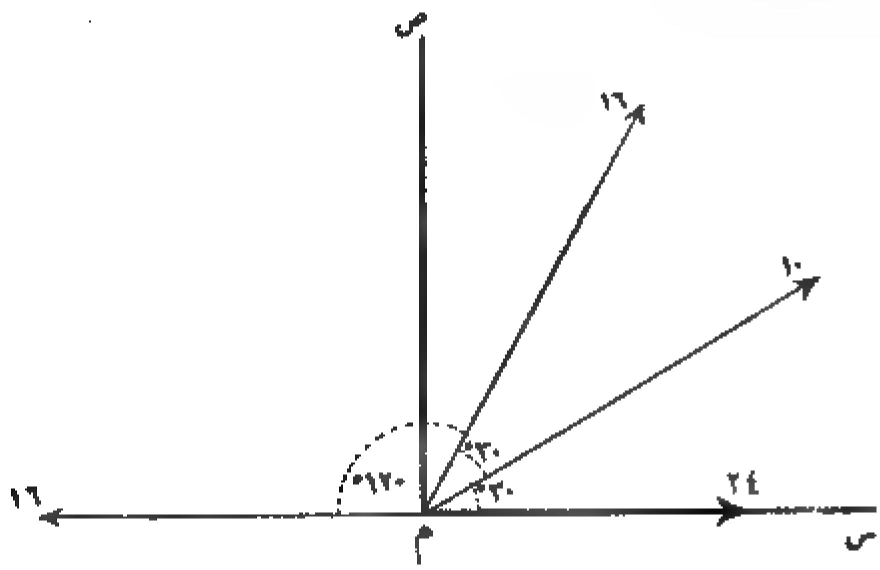
للقوة ٥ √٢ المتجهة فى ا حـ

مركبة قدرها = ٧ √٢ جتا ٤٥° (أو ٥) فى الاتجاه ا ب وأخرى قدرها

٥ √٢ جتا ١٣٥° (أو − ٥) فى الاتجاه ا ءَ فيكون مجموع كل المركبات فى الاتجاه ا ب ٧ + ٥ أو ١٢ ومجموع كل المركبات فى الاتجاه ا ءَ ١٠ − ٥ أو ٥

فالقوى الثلاث تكافىء قوتين إحداهما ١٢ فى الاتجاه ا ب والأخرى ٥ فى الاتجاه ا ءَ ومن القانون المذكور فى بند (٥٠) نجد أن المحصلة تساوى ١٣ .

(مثال ٢) اذا أثرت فى نقطة مادية أربع قوى مقاديرها ٢٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ١٦ من الوحدات وكانت الزاوية التى بين الأولى والثانية ٣٠° والتى بين الثانية والثالثة ٣٠° والتى بين الثالثة والرابعة ١٢٠° فأوجد مقدار محصلتها وظل الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى .



نأخذ اتجاهين متعامدين لتحليل القوى فيهما وليكونا م س (اتجاه القوة الأولى) ، م ص العمودى على م س فتكون مركبتا القوة ٢٤ فى الاتجاهين م س ، م ص ٢٤ ، صفرا على التناظر .

ومركبتا القوة الثانية ١٠ جتا ٣٠° ، ١٠ جا ٣٠° على التناظر

أو ٥ √٣ ، ٥

ومركبتا القوة الثالثة ١٦ جتا ٦٠° ، ١٦ جا ٦٠° على التناظر

أو ٨ ، ٨ √٣

ومركبتا القوة الرابعة − ١٦ ، صفرا

فيكون مجموع كل المركبات فى الاتجاه م س

$$٢٤ + ٥\sqrt{٣} + ٨ - ١٦ \quad \text{أو} \quad ١٦ + ٥\sqrt{٣}$$

ومجموع كل المركبات فى الاتجاه م ص

$$٥ + ٨\sqrt{٣}$$

فاذا رمزنا الى مقدار المحصلة بالرمز ح

يكون $ح^{٢} = (١٦ + ٥\sqrt{٣})^{٢} + (٥ + ٨\sqrt{٣})^{٢}$

$$= ٥٤٨ + ٢٤٠\sqrt{٣}$$

$$\therefore \quad ح = \sqrt{٥٤٨ + ٢٤٠\sqrt{٣}}$$

واذا رمزنا أيضا الى الزاوية التى يصنعها اتجاه المحصلة مع م س بالرمز هـ .

يكون $ظا\, هـ = \frac{٥ + ٨\sqrt{٣}}{١٦ + ٥\sqrt{٣}}$

(تمارين ١٣)

(١) أوجد مقدار محصلة القوى التى فى كل من الأحوال الآتية :

(أولا) قوى قدرها ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ متجهة نحو الشرق والشمال والغرب والجنوب على التناظر .

(ثانيا) قوى قدرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ متجهة من مركز مسدس منتظم الى رؤوسه على الترتيب .

(ثالثا) قوى قدرها ٣ ، ٤ ، ٥ مؤثرة فى نقطة واحدة وموازية أضلاع مثلث متساوى الأضلاع على ترتيب دائرى .

(رابعا) قوى قدرها ٣ ، ٥ ، ٧ مؤثرة فى مركز دائرة ومتجهة نحو ثلاث نقط تقسم محيطها الى ثلاثة أقسام متساوية .

(خامسا) قوى قدرها ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٠ مؤثرة فى نقطة واحدة بحيث تكون الزاوية بين الأوليين ٤٥° وبين الثانية والثالثة ٣٠° .

(سادسا) قوى قدرها ق ، ق ، ٢ ق مؤثرة فى نقطة وموازية أضلاع مثلث متساوى الأضلاع على ترتيب دائرى .

(سابعا) قوى قدرها ٣ $\sqrt{٢}$ ق ، ٤ ق ، ٥ ق ، ٦ ق ، ٢ ق مؤثرة فى نقطة واحدة بحيث تكون الزوايا بين القوى الأربع الأخيرة والقوة الأولى ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° على التناظر .

(٢) أوجد الزاوية التى بين المحصلة والقوة الأولى فى كل حالة من المسألة السابقة مستعينا بجدول النسب المثلثية عند الحاجة .

(٣) تؤثر ثلاث قوى قدرها $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ ، $ق_{١} + ق_{٢}$ فى نقطة واحدة فاذا كانت الزاوية بين الأوليين ٢ هـ وكانت الثالثة تنصف هذه الزاوية فما مقدار المحصلة ؟

(٤) المثلث ا ب حـ متساوى الساقين وفيه ∠ ا = ١٢٠° ، ا ء عمودى على ب حـ فاذا عملت القوة ق من ا الى ب والقوة ٢ ق من ا الى حـ والقوة ٢ ق من ء الى ا فما مقدار محصلة هذه القوى ؟

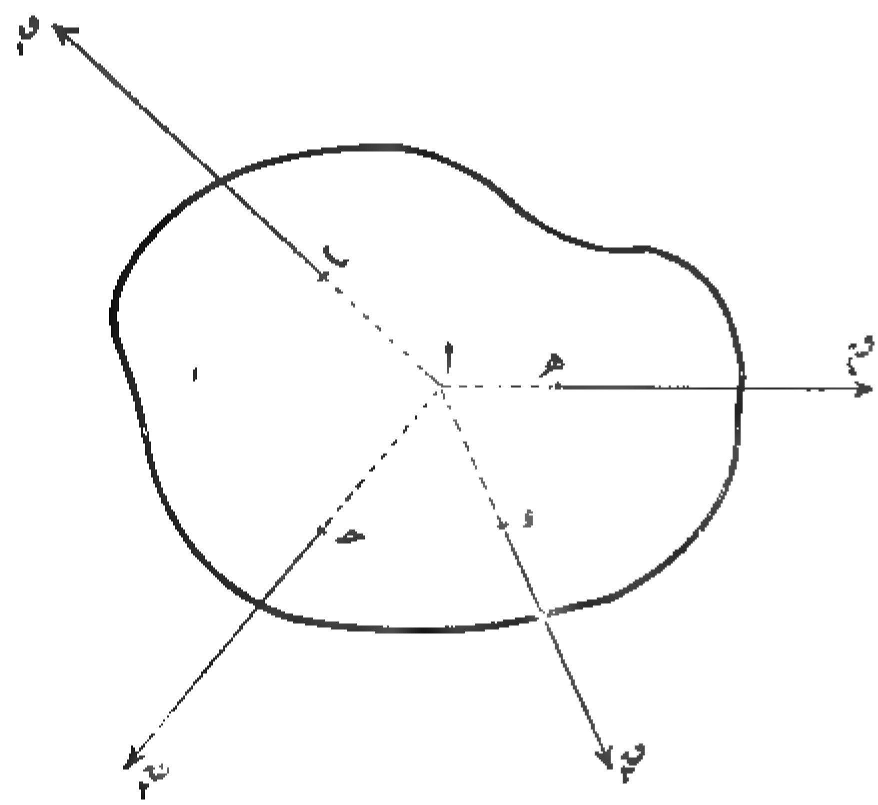
(٥) تؤثر خمس قوى فى نقطة وقدرها ١٨ ، ١٢ $\sqrt{٢}$ ، ٥٠ ، ٣ $\sqrt{٢}$ ، ١٢ $\sqrt{٢}$ وهى متجهة نحو الشرق والشمال الشرقى والشمال والشمال الغربى والغرب على التناظر .

أوجد مقدار مركبتها التى تعمل شرقا .

بند ٥٢ — الجسم الصلب الذى تؤثر فيه قوى متلاقية فى نقطة .

اذا أثر عدد من القوى فى جسم صلب وكانت مستقيمات عملها (أو امتدادها) متلاقية فى نقطة فانه يمكن اعتبار تأثير جميع القوى فى تلك النقطة . وتوجد المحصلة كما لو كانت القوى تؤثر فى نقطة مادية موضعها تلك النقطة .

ليكن ا ب حـ ء هـ جسما صلبا تؤثر فيه القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ التي نقط تأثيرها ب ، حـ ، ء ، هـ على التناظر ومستقيمات عمل القوى (أو امتدادها) تتلاقى فى النقطة ا



فيمكن أن نعتبر أن القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ تؤثر فى النقطة ا وتكون المحصلة قوة واحدة مارة بالنقطة ا .

بند ٥٣ — شروط التوازن وتطبيقها فى المسائل .

اذا رمزنا بالرمزين س ، ص الى مجموعى مركبات جملة معلومة من القوى التى تمر بنقطة واحدة وقد حللت فى أى اتجاهين متعامدين ورمزنا للمحصلة بالرمز ح يكون

$$ح^٢ = س^٢ + ص^٢ \qquad \text{(بنـــد ٥٠)}$$

ويمكن أن نستنبط من هـذه المعادلة الشروط التى بها تكون مجموعة القوى المعلومة فى حالة التوازن .

تكون المجموعة فى حالة التوازن اذا كانت محصلتها تساوى صفرا أى يجب أن تكون ح صفرا فيكون

$$صفر = س^٢ + ص^٢$$

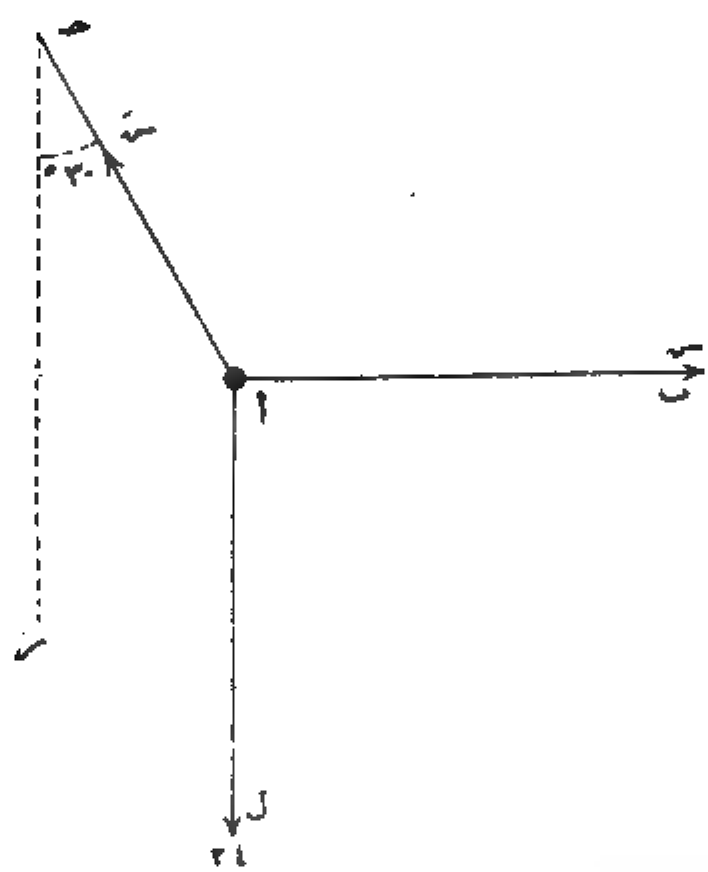
فيجب أن يكون مجموع مربعى س ، ص صفرا ومن حيث إن مربع أى كمية موجب دائما فلا يكون مجموع مربعى كميتين صفرا إلا اذا كان كل من الكميتين صفرا فنستنتج من المعادلة السابقة أن

س = صفرا ، ص = صفرا

ومن حيث ان الاتجاهين اللذين تحللت فيهما كل قوة كانا اختياريين ينتج أنه لابد للتوازن من الشروط الآتية :

يجب أن يكون كل من مجموعى مركبات القوى فى أى اتجاهين متعامدين يساوى صفرا ونأخذ من هذه الشروط طريقة سهلة لحل المسائل الأستاتيكية . وذلك بأن نعبر بالرموز الجبرية عن الشروط التى بها يكون كل من مجموعى مركبات القوى (التى تبحث فيها المسألة) فى اتجاهين اختياريين مساويا صفرا . فنحصل على معادلتين جبريتين نجد أنهما كافيتان لحل جميع المسائل الأستاتيكية التى فيها تكون القوى مارة بنقطة واحدة . واذا كانت احدى القوى قوة التثاقل يستحسن اختيار الاتجاهين الرأسى والأفق لتحليل القوى فيهما .

(مثال ١) كرة ثقلها ٢٤ كيلوجراما يجعلها فى حالة السكون خيطان أحدهما أفق والآخر يميل على الخط الرأسى بمقدار ٣٠° فما الشد فى كل من الخيطين ؟



نفرض أن ا هى تلك الكرة والخيط الأفق ا ب والخيط ا حـ هو الذى يميل على الاتجاه الرأسى بالزاوية ا حـ م المساوية ٣٠°

ويمكن فى هذه المسألة اهمال حجم الكرة واعتبارها نقطة مادية فقط .

فنرى أنها تؤثر فيها ثلاث قوى (الأولى) ثقلها وهو ٢٤ كيلوجراما فى الاتجاه ا ل أى الاتجاه الرأسى الى أسفل (والثانية) الشد ش فى الخيط الأفق (والثالثة) الشد شَ فى الخيط ا حـ

ومن حيث ان هذه القوى الثلاث متوازنة فمن الشروط المذكورة فى هذا البند نستنتج أن مجموع كل المركبات الأفقية وكذا مجموع كل المركبات الرأسية يساوى صفرا

أما المجموع الجبرى للركبات الأفقية فهو شـ — شـَ جتا ٦٠°

والمجموع الجبرى للركبات الرأسية هو ٢٤ — شـَ جتا ٣٠°

فنستخرج قيمتى شـ ، شـَ من المعادلتين

شـ — شـَ جتا ٦٠° = صفرا

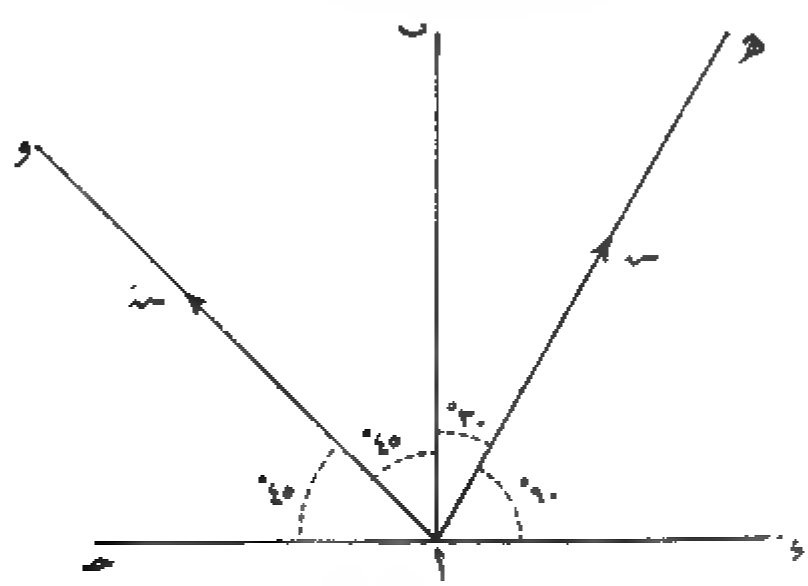
، ٢٤ — شـَ جتا ٣٠° = صفرا

فمن المعادلة الثانية نجد أن شـَ = $\frac{٤٨}{\sqrt{٣}}$ من الكيلوجرامات

و بالتعويض فى المعادلة الأولى يكون شـ = $\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}$ من الكيلوجرامات

(مثال ٢) أرسى قارب فى نهير بحبلين ربطا فى عمودين على الشاطئين. وكان الحبلان يميلان على اتجاه التيار بزاويتى ٣٠° ، ٤٥° فما النسبة بين الشدّين فى الحبلين ؟

يمكن فى هذه المسألة أن نهمل حجم القارب ونعتبره نقطة مادية وليكن ا وضع القارب ، شـ ، شـَ الشدّين فى الحبلين ا هـ ، ا و اللذين يميلان على اتجاه التيار ب ا بالزاويتين ٣٠° ، ٤٥° على التناظر



ثقل القارب هو عبارة عن قوة رأسية متجهة الى أسفل يوازنها ضغط المـاء الى أعلى فيمكن اهماله فى هذه المسألة . ويتضح حينئذ عند اعتبار القوى التى فى المستوى الافقى الذى فيه القارب أن القوى التى تجعل القارب فى حالة التوازن ثلاث وهى شدّا الحبلين وقوة دفع التيار للقارب .

فلايجاد النسبة بين الشدّين نحلل القوى فى الاتجاه حـ ا ى العمودى على اتجاه التيار ب ا ثم نساوى بين مجموع المركبات والصفر .

ونرى أن قوة التيار ليس لهـا مركبة فى الاتجاه حـ ى لأن اتجاه التيار عمودى على حـ ى فيكون المجموع الجبرى للمركبات

$$ش_١ \text{ جتا } ٦٠° - ش_٢ \text{ جتا } ٤٥°$$

$$\text{فيكون} \quad ش_١ \text{ جتا } ٦٠° - ش_٢ \text{ جتا } ٤٥° = \text{صفرا}$$

$$\text{ومنه} \quad ش_١ - ش_٢ \sqrt{٢} = \text{صفرا}$$

$$\text{أو} \quad \frac{ش_١}{ش_٢} = \frac{\sqrt{٢}}{١}$$

وهـذه هى النسـبة بين الشدّين .

(تمـارين ١٤)

(١) عُلِّق جسم ثقله ٢٥ كيلو جراما فى طرفى خيطين مائلين على الخط الرأسى بزاويتى ٣٠ ، ٦٠° ما مقدار الشدّ فى كل من الخيطين ؟

(٢) عقدت أطراف أربعـة خيوط عقدة واحدة ثم ثبتت الأطراف الأخرى لثلاثة منها فى النقط ا ، ب ، حـ التى هى رءوس مثلث متساوى الأضلاع فى مستو أفقى وعُلِّق جسم ثقله ٢٠ جراما فى طرف الخيط الرابع الخالص . أوجد مقدار الشدّ فى كل من الخيوط العليا علما بأن طول كل منها ١٣ سنتيمترا . وأن العقدة واقعة تحت مستوى المثلث على مسافة ٥ سنتيمترات منه .

(٣) عقدت أطراف خمسة خيوط عقدة واحدة ثم ثبتت الأطراف الأخرى لأربعة منها فى النقط ا ، ب ، حـ ، ء التى هى رءوس مربع فى مستو أفق وعُلِّق جسم ثقله ٥٠ جراما فى طرف الخيط الخامس الخالص . أوجد مقدار الشدّ فى كل من الخيوط العليا علما بأن طول كل منها ١٠١ من السنتيمترات وأن العقدة واقعة تحت مستوى المربع على مسافة ٩٥ سنتيمترا منه .

(٤) ارسيت عوّامة فى نهر بحبلين متعامدين قد ثبت طرفاهما الآخران فى نقطتين على ضفتى النهر بحيث يكون المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين عموديا على اتجاه التيار . فاذا كانت قوة ضغط التيار على العوّامة ضعف مقدار الشدّ فى أحد الحبلين فأثبت أن طول الحبل الآخر نصف عرض النهر .

(٥) ثبت طرفا خيط فى النقطتين ا ، ب الواقعتين فى مستقيم أفق بحيث كان طول الخيط ضعف المستقيم ا ب ثم عُلق جسم ثقله ١٠٠ كيلوجرام فى النقطة ط على الخيط فاذا اختيرت ط بحيث تكون ∠ ا ط ب = ٦٠° فأوجد مقدار الشدّ فى جزأى الخيط بالرسم .

٢

القوى التى لا تمر بنقطة واحدة .

بند ٥٤ — القــوى المتــوازية .

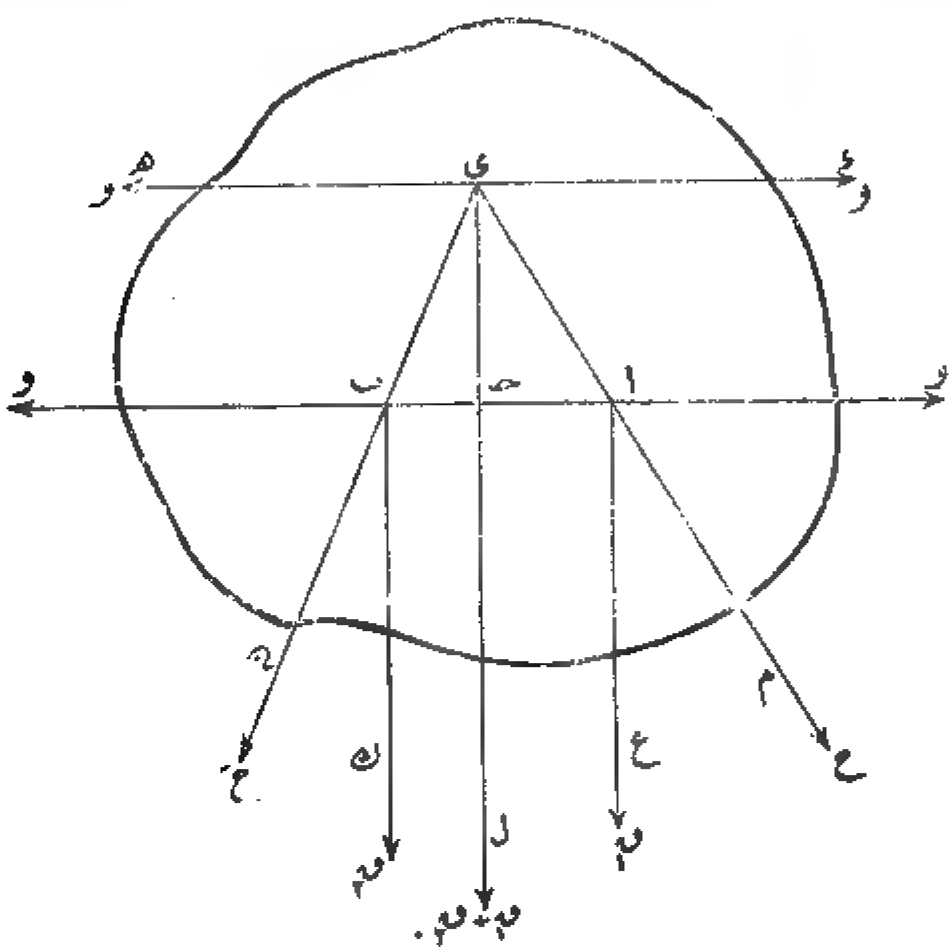
إن أبسط أحوال القوى التى لا تمر بنقطة واحدة الحالة التى فيها يتأثر جسم صلب بقوى متوازية .

بند ٥٥ — محصلة قوتين متوازيتين متحدتى الاتجاه .

نفرض أن $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه وأنهما تؤثران فى النقطتين ا ، ب من الجسم الصلب ا حـ ب فى الاتجاهين ا ع ، ب ك والمطلوب ايجاد محصلتهما .

يمكننا بدون تغيير تأثير القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ أن نوقع على الجسم قوتين ، كل تساوى و بحيث تعملان فى المستقيم ا حـ ب وتأخذ احداهما الاتجاه ا ب والأخرى الاتجاه ب ا .

فهاتان القوتان تتزنان فيكون تأثير القوتين ق١ ٬ ق٢ معـا مساويا تأثير القوى الأربع ق١ ٬ ق٢ ٬ و فى الاتجـاه ب ا ٬ و فى الاتجاه ا ب . وبمقتضى متوازى الأضلاع للقوى يكون للقوتين ق١ ٬ و اللتين تؤثران فى ا محصلة هى ح فى الاتجاه ا م ويكون للقوتين ق٢ ٬ و اللتين تؤثران فى ب محصلة هى حَ فى الاتجاه ب د فالقوتان المتوازيتان المعلومتان تكافئان القوتين ح المؤثرة فى ا ٬ حَ المؤثرة فى ب



فاذا مددنا اتجاهى ح ٬ حَ حتى تقابلا فى ى أمكننا اعتبار أنهما تؤثران فى ى فالقوتان ق١ ٬ ق٢ مكافئتان للقوتين ح ٬ حَ اللتين تؤثران فى ى وتأخذان الاتجاهين ى ا ٬ ى ب . نرسم ى ى هـ موازيا ا حـ ب ٬ ى حـ ل موازيا ا ع أو ب ك ونحلل ح الى مركبتين فى الاتجاهين ى ى ٬ ى حـ ٬ حَ الى مركبتين فى الاتجاهين ى هـ ٬ ى حـ . فمن الواضح أن مركبة ح فى الاتجاه ى ى تساوى و وكذا مركبة حَ فى الاتجاه ى هـ وأن مركبة ح فى الاتجـاه ى حـ تساوى ق١ ومركبة حَ فى الاتجـاه ى حـ تسـاوى ق٢ . فنرى أن القوتين ق١ ٬ ق٢ معـا تكافئان

مجموعة القوى و فى الاتجاه ى هـ ، و فى الاتجاه ى ى ، $ق_١$ فى الاتجاه ى حـ ، $ق_٢$ فى الاتجاه ى حـ

ثم ان القوتين و فى الاتجاه ى ى ، و فى الاتجاه ى هـ تتزنان . والقوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ فى الاتجاه ى حـ تكافئان معا قوة واحدة هى $ق_١ + ق_٢$ فى الاتجاه ى حـ فمحصلة القوتين $ق_١$ فى الاتجاه ا ع ، $ق_٢$ فى الاتجاه ب ك قوة واحدة هى $ق_١ + ق_٢$ تعمل فى المستقيم حـ ل الذى يوازى ا ع ، ب ك

بقى الآن ايجاد موضع النقطة حـ

فمن حيث ان القوة ع اذا عكس اتجاهها تكون معادلة القوتين $ق_١$ ، و ينتج ان القوة $ق_٢$ ، القوة و والقوة التى هى عكس ع تكون متوازنة ومن حيث ان اتجاهات هذه القوى الثلاث توازى الأضلاع ا ى ، ى حـ ، حـ ا من المثلث ا ى حـ نستنتج من مثلث القوى أن الأضلاع الثلاثة تتناسب مع القوى ع ، $ق_١$ ، و

فيكون $\frac{ا حـ}{حـ ى} = \frac{و}{ق_١}$ ... ... (١)

وكذا من المثلث ى حـ ب يحدث أن

$\frac{حـ ى}{حـ ب} = \frac{ق_٢}{و}$ ... ... (٢)

$$فيكون \quad \frac{ا حـ}{حـ ب} = \frac{ا حـ}{حـ ى} \times \frac{حـ ى}{حـ ب} = \frac{و}{ق_١} \times \frac{ق_٢}{و} = \frac{ق_٢}{ق_١}$$

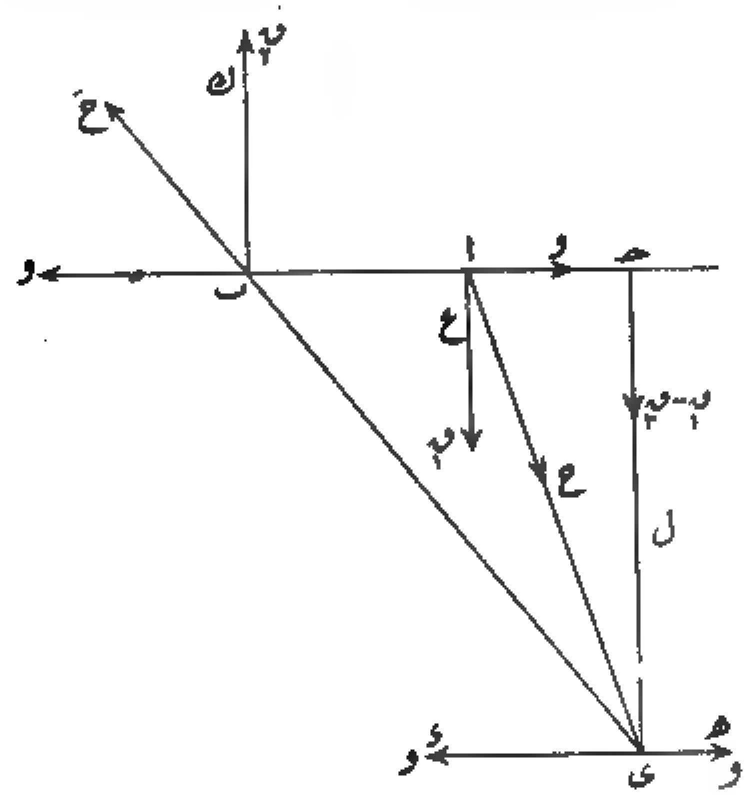
وبذا تتعين النسبة بين جزأى المستقيم ا ب الذى ينقسم اليهما بالنقطة حـ

ونعبر عن هذه النتيجة بقولنا إن حـ تقسم المستقيم ا ب الى ا حـ ، حـ ب والنسبة بينهما تساوى النسبة العكسية للقوتين المجاورتين لهما على التناظر

بند ٥٦ — <u>محصلة قوتين متوازيتين مختلفتى الاتجاه</u> .

نفرض أن $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتان متوازيتان مختلفتا الاتجاه وأنهما تؤثران فى النقطتين ا ، ب من جسم صلب والمطلوب ايجاد محصلتهما .

نفرض أن ق١ أكبر القوتين فيسهل على الطالب بمقتضى الرسم المبين في الشكل الذى يشابه الرسم في البند السابق أن يبرهن على أن المحصلة قوة واحدة هى ق١ — ق٢



تؤثر فى النقطة حـ التى تقع على امتداد المستقيم ب ا (علما بأن ا نقطة تأثير القوة الكبرى) ثم ان حـ تقسم ا ب من الخارج الى ا حـ ، ب حـ النسبة بينهما تساوى النسبة العكسية للقوتين المجاورتين لها .

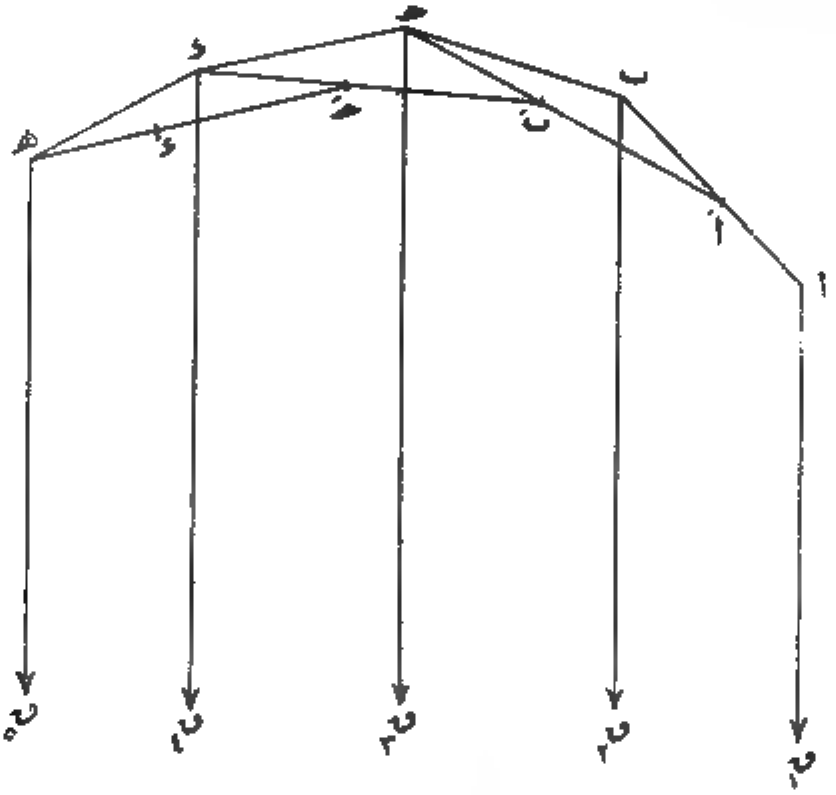
بند ٥٧ — محصلة جملة من القوى المتوازية — مركز القوى المتوازية .

اذا أثرت جملة من القوى المتوازية فى جسم صلب فان محصلتها توجد بتكرار تطبيق نظريتى البندين السابقين .

فمثلا اذا كان لدينا جملة القوى الخمس ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ ، ق٥ التى نقط تأثيرها على التوالى هى ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ نبحث عن محصلتها كما يأتى :

نبدأ بايجاد محصلة القوتين ق١ ، ق٢ وهى قوة واحدة تقع نقطة تأثيرها آ فى المستقيم ا ب فيمكن أن يستعاض عن القوتين ق١ ، ق٢ المؤثرتين فى ا ، ب محصلتهما المؤثرة فى آ ثم نركب هذه المحصلة مع القوة ق٣ المؤثرة فى حـ فتكون محصلتهما قوة واحدة تقع نقطة تأثيرها بَ بين آ ، حـ

وهـذه القوة المؤثرة فى بَ التى تكافىء ثلاث القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ تركب مع القوة ق٤ المؤثرة فى ء فتكون محصلتهما قوة واحدة تقع نقطة تأثيرها حـَ فى المستقيم



بَ ء وهـذه القوة المؤثرة فى حـَ تكافىء القوى الأربع ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ .
وأخيرا تكون محصلة القوة المؤثرة فى حـَ مع القوة ق٥ المؤثرة فى هـ قوة واحدة تقع نقطة تأثيرها ءَ فى المستقيم حـَ هـ فهذه القوة المؤثرة فى ءَ محصلة القوى الخمس ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ ، ق٥

وليلاحظ أن موضع النقطة لا يتوقف بأى حال من الأحوال على اتجاه القوى المتوازية فلا يتغير موضع ءَ بتغير اتجاهات القوى مادامت متوازية نعلى هذه الخصية تسمى ءَ بمركز القوى الخمس المتوازية .

ومهما كان عدد القوى فالنظرية الآتية صحيحة على العموم :

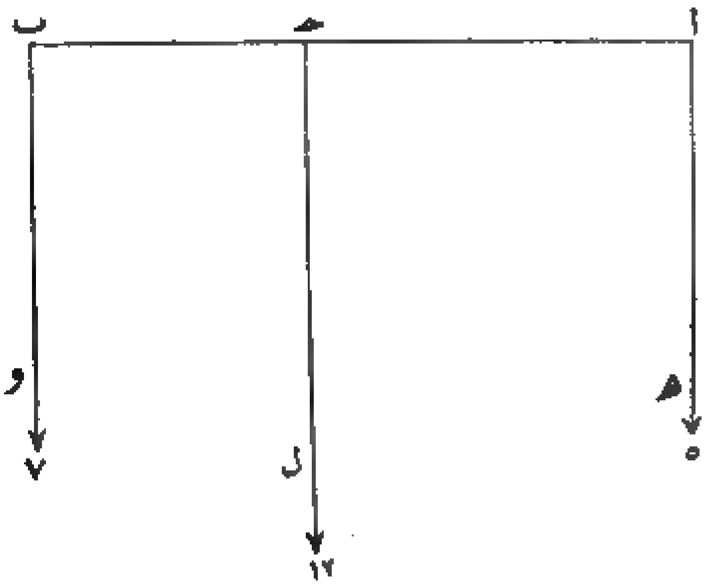
اذا أثرت جملة من القوى المتوازية فى جسم صلب ومرت كل قوة بنقطة معينة فى الجسم فان المحصلة تمر دائما بنقطة ثابتة مهما كان اتجاه القوى المتوازية . وتسمى هذه النقطة بمركز جملة القوى المتوازية المعينة .

(مثال ١) قوّتان قدرهما ٥ ، ٧ من الوحدات تعملان فى مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٢٤ سنتيمترا . فما مقدار محصلتهما واتجاهها ؟

(أولا) اذا كانتا متحدتى الاتجاه ، (ثانيا) اذا كانتا مختلفتى الاتجاه

(أولا) لتكن القوّتان متحدتى الاتجاه وليكن اتجاهاهما ا هـ ، ب و والبعد بينهما ٢٤ سنتيمترا .

فتكون محصلتهما قوّة تعمل فى مستقيم هو حـ ل يوازى ا هـ ، ب و ومقدار تلك المحصلة = ٥ + ٧ ، ١٢ والنقطة حـ تقسم ا ب الى قسمين بحيث يكون



$$\frac{\text{ا حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{٧}{٥} \text{ ، } \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا حـ} + \text{حـ ب}} = \frac{٧}{٧ + ٥}$$

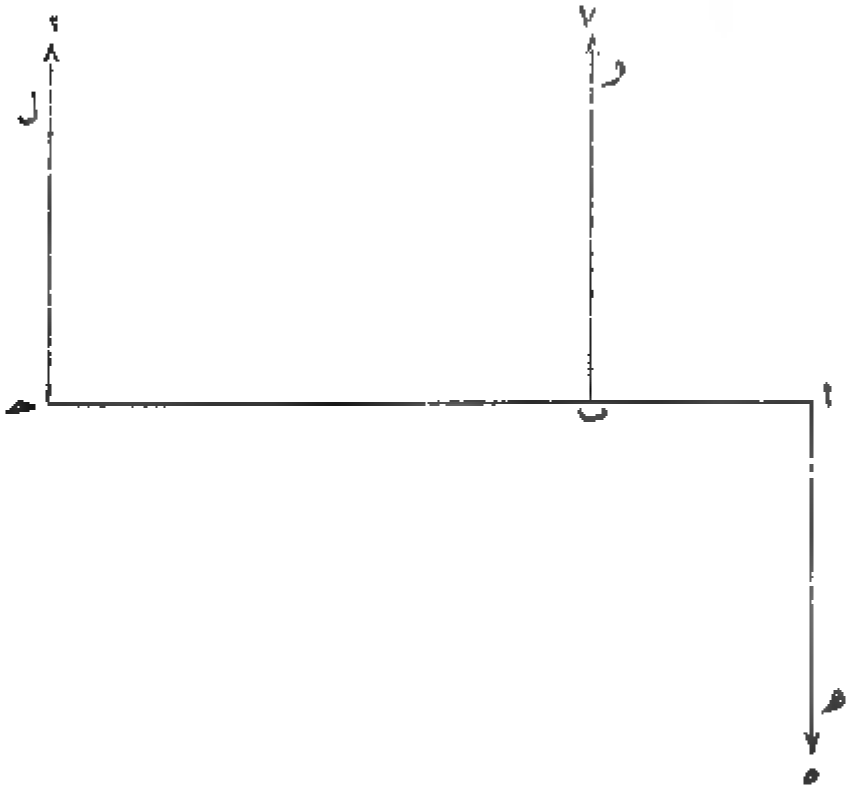
أو $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{٧}{١٢}$

ولكن ا ب = ٢٤ سنتيمترا

فيكون $\frac{\text{ا حـ}}{٢٤} = \frac{٧}{١٢}$ ومنه ا حـ = ١٤ سنتيمترا

والجزء الآخر ب حـ = ١٠ سنتيمترات

(ثانيا) اذا كانت القوتان مختلفتى الاتجاه تكون المحصلة قوة فى الاتجاه حـ ل (اتجاه القوة الكبرى) ويكون مقدارها الفرق بين القوتين المتوازيتين أعنى وحدتين ولايجاد النقطة حـ نقطة تأثير المحصلة نعتبر المعادلة



$$\frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{٧}{٥}$$

التى منها $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ا حـ} - \text{ب حـ}} = \frac{٧}{٧ - ٥}$

أى $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}} = \frac{٧}{٢}$

أى $\frac{\text{ا حـ}}{٢٤} = \frac{٧}{٢}$ ، ا حـ = ٨٤ سنتيمترا

وعلى ذلك ب حـ = ٦٠ سنتيمترا

(تمارين ١٥)

(١) أوجد محصلة قوتين قدرهما ٧ ، ١٣ تؤثران فى مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٤٠ سنتيمترا (أولا) اذا كانتا متحدتى الاتجاه ، (ثانيا) اذا كانتا مختلفتى الاتجاه .

(٢) قوتان متوازيتان قدر كل منهما ٨ كيلوجرامات تؤثران فى اتجاهين مختلفين والبعد بينهما ١٥ سـنتيمترا . وهناك قوة ثالثة قـدرها ١٦ كيلوجراما موازية لهما وهى فى منتصف المسافة بينهما . أوجد مقدار محصلة هذه القوى الثلاث ومستقيم عملهـا .

(٣) أوجد مقدار محصلة القوى الآتية التى فى مستو واحد وكذلك مستقيم عملها : القوتان ا ، حـ قدرهما ٧ ، ٨ تؤثران فى جهة رأسية الى أسفل . والقوتان ب ، ى قدرهما ٦ ، ١٠ تؤثران فى جهة رأسـية الى أعلى والمسافة بين ا ، ب ١٢ سنتيمترا والمسافة بين ب ، حـ ٤ سنتيمترات وبين حـ ، ى ٩ سنتيمترات .

(٤) ا ب حـ خط مستقيم فيه ا ب = ١٢ سنتيمترا ، ب حـ = ١٨ سنتيمترا وهنـاك قوة قـدرها ٢٠ كيلوجراما مؤثرة فى حـ . حلل هـذه القوة الى قوتين متوازيتين مختلفتى الاتجاه مؤثرتين فى ا ، ب .

(٥) خمس قوى متوازية ومتحدة الاتجاه قدرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ تؤثر فى نقط على مسـتقيم واحد بحيث تكون المسافة بين كل نقطتين متجاورتين ٦ سنتيمترات . أوجد محصلة هذه القوى المتوازية ومركزها .

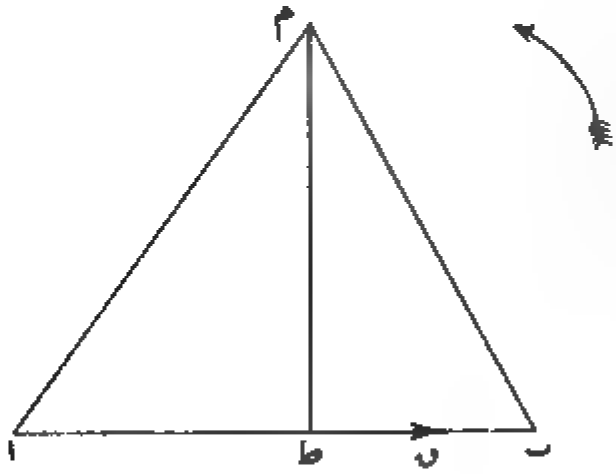
(٦) أوجد المحصلة والمركز لمجموعة ٧ قوى متوازية قدرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ مؤثرة فى النقط ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ ، و ، ر الواقعة على مستقيم واحد علما بأن القوى المؤثرة فى ا ، حـ ، هـ ، ر تتجه الى أسـفل والقوى المؤثرة فى ب ، ى ، و تتجه الى أعلى وأن الأبعـاد ا ب ، ا حـ ، ا ى ، ا هـ ، ا و ، ا ر هى ٨ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٣ ، ٣٠ ، ٣٨ من السنتيمترات على التوالى .

(٧) ا ب حـ مثلث ، م نقطة داخلة فاذا أثرت ثلاث قوى متوازية فى ا ، ب ، حـ وكانت مناسبة لمساحات المثلثات م ب حـ ، م حـ ا ، م ا ب على التوالى فأثبت أن محصلتها تمر بالنقطة م .

بند ٥٨ — **عزم قوة بالنسبة لنقطة .**

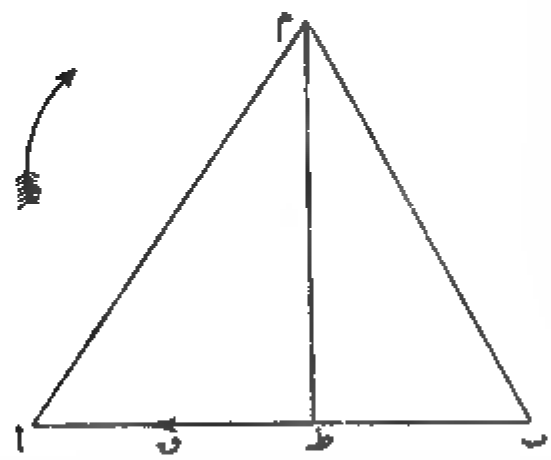
عزم قوة بالنسبة لنقطة هو حاصل ضرب العدد الدال على مقدار القوة فى العدد الدال على طول العمود النازل من النقطة على مستقيم عمل القوة .

فاذا مثلنا قوة ق رسما بالمستقيم ا ب كان عزم القوة ق بالنسبة للنقطة م حاصل ضرب عدد الوحدات التى يحتوى عليها ا ب فى عدد الوحدات التى يحتوى عليها العمود م ط ومن حيث ان مساحة المثلث ا م ب تساوى نصف حاصل ضرب العمود م ط فى القاعدة ا ب ينتج أن عزم القوة ق بالنسبة للنقطة م يقاس بضعف مساحة المثلث ا م ب .



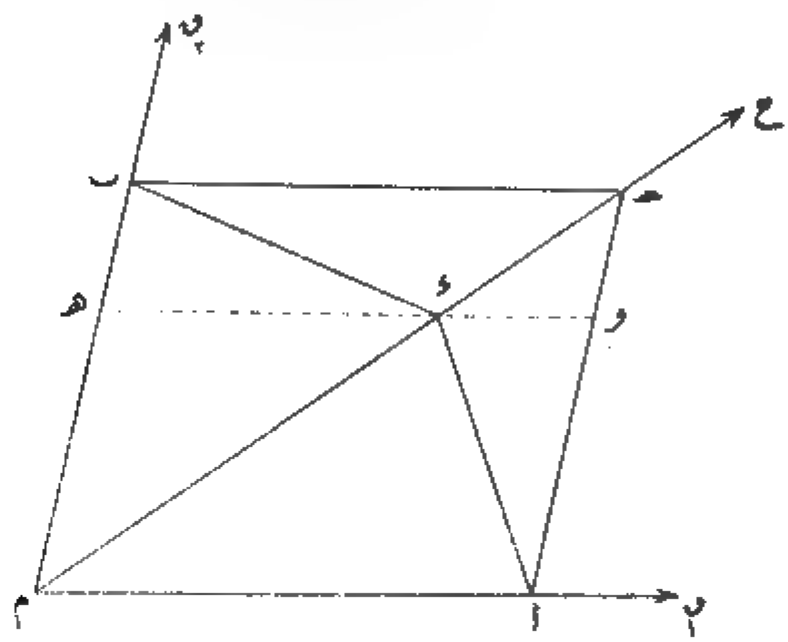
ويتضح من هذا التعريف أن القوة لا يكون لها عزم بالنسبة لنقطة على مستقيم عملها .

ويقاس اندفاع القوة الى احداث دوران حول نقطة بعزم القوة بالنسبة للنقطة . يلاحظ الطالب فى الشكل الأول أن القوة ق تؤثر من ا الى ب فاذا كانت م ثابتة تعمل القوة على احداث حركة حولها فى اتجاه مضاد لاتجاه تحرك عقربى الساعة . وفى الشكل الثانى تؤثر القوة ق من ب الى ا فاذا كانت م ثابتة تعمل القوة على إحداث حركة حولها فى اتجاه تحرك عقربى الساعة . ولتمييز الحالتين يستعمل المصطلحان الجبريان "موجب" و "سالب" بعلامتيهما + ، — فعزم قوة تعمل على إحداث حركة بالنسبة لنقطة فى اتجاه مضاد لاتجاه تحرك عقربى الساعة يسمى عادة عزما موجبا . أما عزم القوة التى تعمل على إحداث حركة فى اتجاه تحرك عقربى الساعة فسالبا .



بند ٥٩ — المجموع الجبرى لعزم قوتين بالنسبة لنقطة فى مستقيم عمل محصلتهما يساوى صفرا .

(١) نأخذ أولا الحالة التى فيها يكون مستقيما عمل القوتين متلاقيين وليمثل المستقيمان م ا ، م ب القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ فيكون ا حـ ممثلا لمحصلتهما . فاذا أخذت أى نقطة مثل ى فى المستقيم م حـ فان عزم القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ بالنسبة للنقطة ى يقدر بمساحتى المثلثين م ا ى ، م ب ى . وتعتبر المساحة م ا ى كمية موجبة والمساحة م ب ى كمية سالبة فتثبت النظرية اذا برهنا على أن هاتين المساحتين متساويتان



نرسم هـ ى و موازيا م ا فينتج أن

المساحة م ى ا + المساحة ب ى حـ = $\frac{١}{٢}$ المساحة م ا و هـ + $\frac{١}{٢}$ المساحة هـ و حـ ب

= $\frac{١}{٢}$ المساحة م ا حـ ب

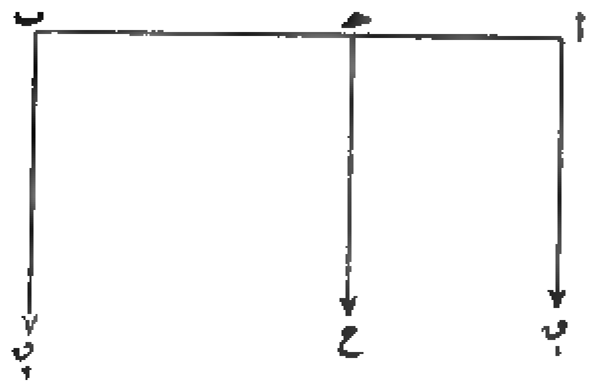
، المساحة م ب ى + المساحة ب ى حـ = $\frac{١}{٢}$ المساحة م ا حـ ب

∴ المساحة م ى ا + المساحة ب ى حـ = المساحة م ب ى + المساحة ب ى حـ

ومنه تكون المساحة م ى ا = المساحة م ب ى

ومن حيث ان المساحتين متساويتان ومختلفتا الاشارة الجبرية فمجموعهما الجبرى يساوى صفرا .

(٢) نأخذ ثانيا حالة القوتين المتوازيتين .



فاذا كانت $ق_١$ ، $ق_٢$ القوتين المتوازيتين ، ا ب المسافة العمودية بين مستقيمى عملهما

، حـ نقطة تقاطع مستقيم عمل المحصلة ح والمستقيم ا ب فان

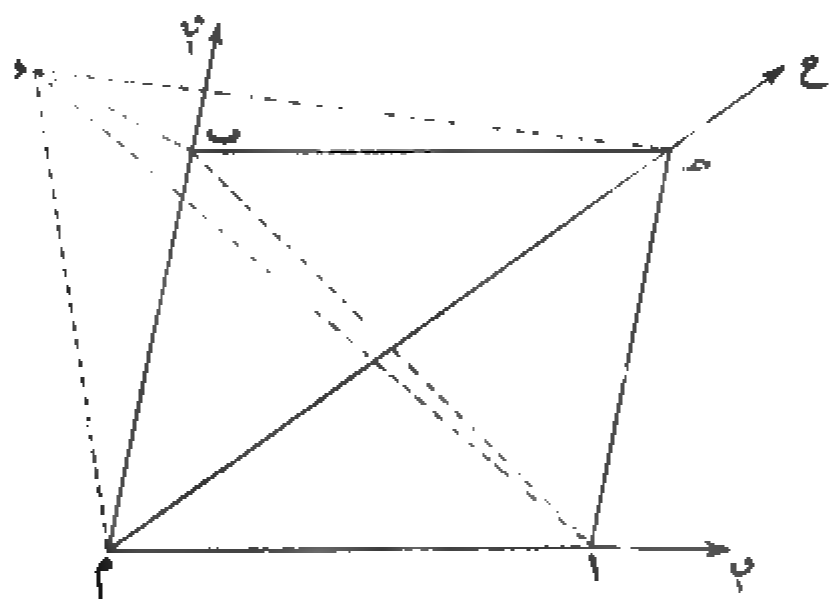
$$\frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{ب حـ}{ا حـ}$$

ويكون $ق_١ \times ا حـ = ق_٢ \times ب حـ$

ثم ان $ق_١ \times ا حـ$ يدل على عزم $ق_١$ بالنسبة الى حـ ، $ق_٢ \times ب حـ$ يدل على عزم $ق_٢$ بالنسبة للنقطة نفسها . فيكون العزمان متساويين . وواضح أنهما مختلفا الاشارة الجبرية . فالمجموع الجبرى للعزمين بالنسبة للنقطة حـ يساوى صفرا . ، حـ بالعمل نقطة أيا كانت على مستقيم عمل المحصلة فتثبت النظرية .

بند ٦٠ — <u>المجموع الجبرى لعزمى قوتين بالنسبة لنقطة مايساوى عزم محصلتهما بالنسبة لنفس النقطة .</u>

(١) نفرض أن القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ تتقابلان فى نقطة . ونمثلهما بالمستقيمين



م ا ، م ب فيكون م حـ ممثلا للمحصلة ح ثم نأخذ نقطة مثل ى فيكون ضعف مساحات المثلثات م ا ى ، م ى ب ، م حـ ى ممثلا لعزوم القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ح على التناظر .

ومن الوضع الذى تأخذه ى فى هذا الشكل يرى أن العزوم كلها موجبة فتثبت النظرية اذا برهنا على أن مجموع المساحتين م ا ى ، م ب ى يساوى المساحة م حـ ى .

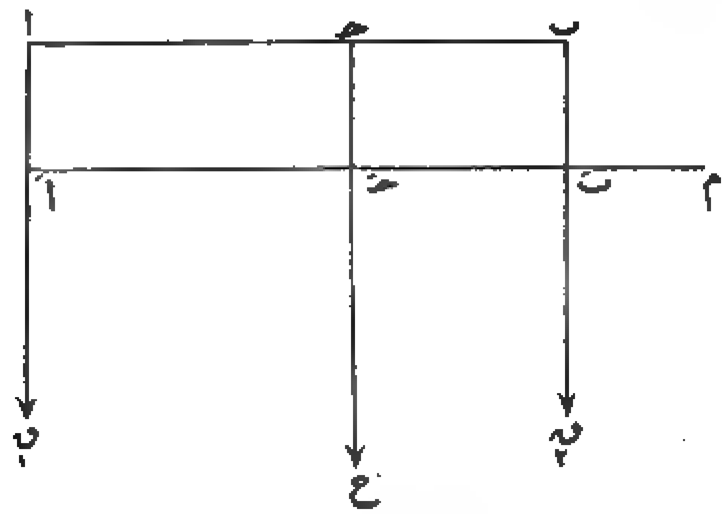
من حيث إن ارتفاع المثلث م ى ا يساوى مجموع ارتفاعى المثلثين م ب ا ، ب ى حـ

ومن حيث إن قواعد هذه المثلثات متساوية ينتج أن مساحة المثلث م ى ا تساوى مجموع مساحتى المثلثين م ب ا ، ى ب حـ أى تساوى مساحة المثلث ى ب حـ مضافا اليها نصف مساحة متوازى الأضلاع . فيكون مجموع المساحتين م ا ى ، م ب ى يساوى مجموع مساحتى ى ب حـ ، م ب ى ومساحة نصف متوازى الأضلاع أى يساوى مجموع المساحات الثلاث ى ب حـ ، م ب ى ، م ب حـ التى تكوّن المساحة م حـ ى . فمجموع المساحتين م ى ا ، م ب ى مساو المساحة م حـ ى .

(٢) نفرض أن القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ متوازيتان وأن ا ب المسافة العمودية بينهما وأن حـ نقطة تقاطع المحصلة ح والمستقيم ا ب ونأخذ نقطة مثل م ثم نرسم م بَ حـَ اَ قاطعا مستقيمات عمل القوى فى النقط بَ ، حـَ ، اَ .

نرى من الوضع الذى تأخذه م فى هذا الشكل أن العزوم كلها موجبة . فتثبت النظرية إذا برهنا على ان مجموع عزمى $ق_١$ ، $ق_٢$ بالنسبة للنقطة م يساوى عزم ح بالنسبة للنقطة م

مجموع عزمى $ق_١$ ، $ق_٢$ هو



$$\text{ق}_2 \times \text{م ب} + \text{ق}_1 \times \text{م أ}$$

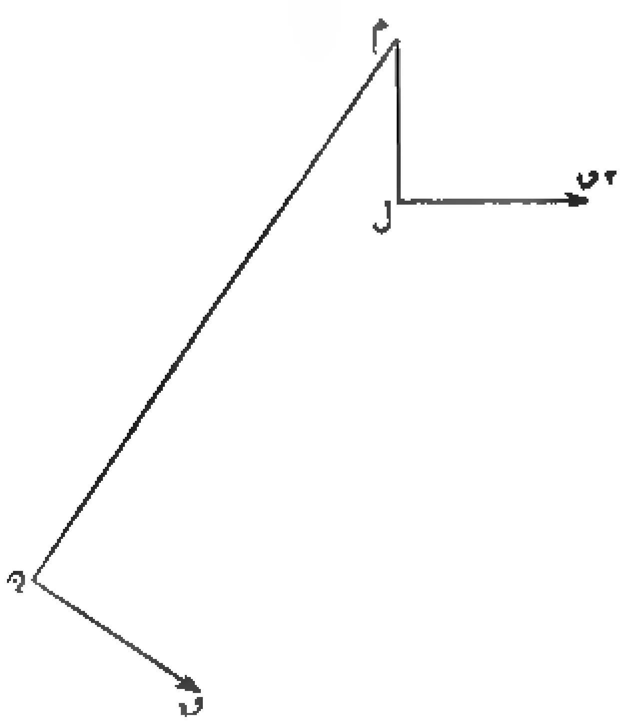
$$= \text{ق}_2 (\text{م حـ} - \text{ب حـ}) + \text{ق}_1 (\text{م حـ} + \text{حـ أ})$$

$$= (\text{ق}_1 + \text{ق}_2)\,\text{م حـ} + \text{ق}_1 \times \text{حـ أ} - \text{ق}_2 \times \text{ب حـ}$$

ومن حيث إن حـ نقطة فى مستقيم عمل المحصلة يكون $\text{ق}_1 \times \text{حـ أ}$ مساويا $\text{ق}_2 \times \text{ب حـ}$ فيكون $\text{ق}_1 \times \text{حـ أ} - \text{ق}_2 \times \text{ب حـ} = $ صفرا . فمجموع عزمى القوتين ق_1 ، ق_2 بالنسبة للنقطة م مساو $(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)\,\text{م حـ}$ أى مساو $\text{ح} \times \text{م حـ}$ أى مساو عزم المحصلة بالنسبة للنقطة م .

قد أثبتنا حينئذ النظرية لقوتين فمن السهل البرهنة على أن المجموع الجبرى لعزوم جملة من القوى (التى تمر بنقطة أو تتوازى) بالنسبة لنقطة ما يساوى عزم محصلتها بالنسبة للنقطة نفسها . لأن المجموع الجبرى لعزمى أى اثنين منها يساوى عزم محصلتهما . ومجموع عزمى المحصلة وقوة ثالثة يساوى عزم محصلة الثلاث كلها وهكذا .

وتدلنا هذه النظرية على طريقة واضحة لايجاد مستقيم عمل محصلة مجموعة من القوى المتوازية . وذلك أن نبدأ بايجاد مقدار المحصلة كما فى بند ٥٧ ثم نختار نقطة ما ونعبر عن أن عزم المحصلة بالنسبة لهذه النقطة يساوى المجموع الجبرى لعزوم جميع القوى بالنسبة اليها . فنحصل على معادلة جبرية منها يوجد موضع المحصلة .



(مثال ١) احدى قوتين ضعف القوة الثانية ولكن عزم القوة الثانية بالنسبة لنقطة معينة ضعف عزم الأولى .

قارن بين بعدى النقطة عن مستقيمى عمل القوتين .

نرمز للقوتين بالرمزين ٢ ق ، ق ونفرض أن م ل ، م د هما العمودان على مستقيمى عملهما من النقطة م .

فمن حيث ان عزم القوة ن بالنسبة للنقطة م ضعف عزم القوة ٢ ن بالنسبة للنقطة م يكون ن × م د = ٢ × ٢ ن × م ل .

وبقسمة كل من الطرفين على ن ينتج أن م د = ٤ م ل .

أى أن بعد مستقيم عمل القوة الصغرى عن النقطة المعينة يساوى أربعة أمثال بعد مستقيم عمل القوة الكبرى عنها .

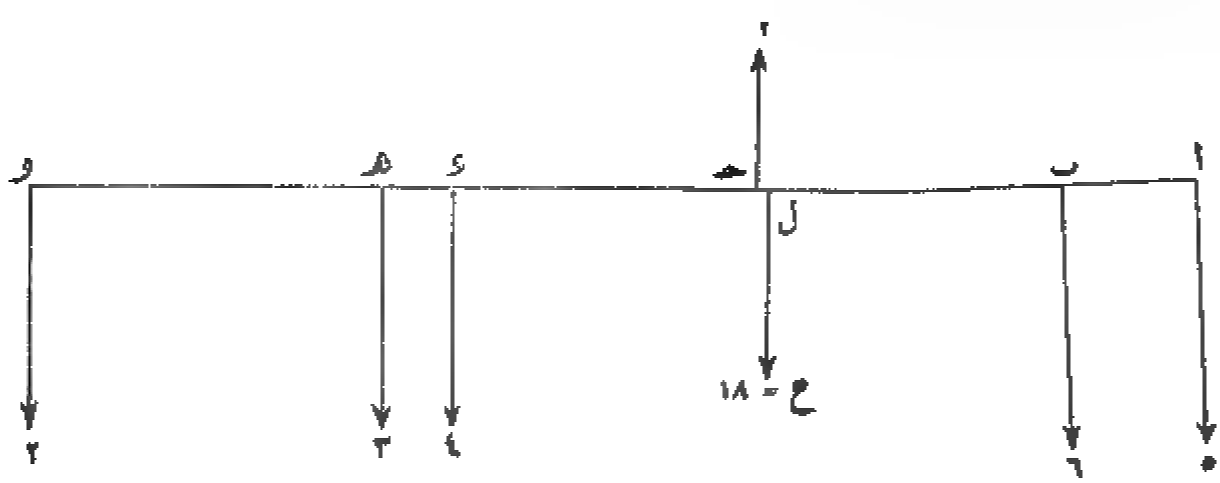
(مثال ٢) أوجد محصلة مجموعة القوى المتوازية الآتية :

فى النقط ا ، ب ، ء ، هـ ، و الواقعة على المستقيم ا و تؤثر قوى متوازية متحدة الاتجاه قدرها ٥ و ٦ و ٤ و ٣ و ٢ من الجرامات على التوالى وفى النقطة حـ تؤثر قوة أخرى قدرها جرامان فى الاتجاه المضاد ، ا ب = ٦ سنتيمترات ، ب حـ = حـ ء = ١٤ سنتيمترا ، ء هـ = ٣ سنتيمترات ، هـ و = ١٦ سنتيمترا .

من الواضح أن محصلة القوى تساوى

٥ + ٦ + ٤ + ٣ + ٢ − ٢ = ١٨ جراما .

فالنقطة (ل مثلا) التى فيها يتقاطع مستقيم عمل المحصلة ، ا و يمكن ايجادها اذا عبرنا جبريا عن أن المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لأى نقطة يساوى عزم المحصلة بالنسبة للنقطة نفسها .



نأخذ العزوم بالنسبة للنقطة ا فيكون عزم القوة ٥ جرامات المؤثرة فى ا بالنسبة للنقطة ا صفرا وعزم القوة ٦ المؤثرة فى ب هو ٦ × ا ب ، ٦ × ٦ وعزم

القوة ٢ المؤثرة فى حـ هو — ٢ × أحـ ، — ٢ × ٢٠ وعزم القوة ٤ المؤثرة فى ى هو ٤ × أ ى ، ٤ × ٣٤ وعزم القوة ٣ المؤثرة فى هـ هو ٣ × أ هـ ، ٣ × ٣٧ وعزم القوة ٢ المؤثرة فى و هو ٢ × أ و ، ٢ × ٥٣ وعزم المحصلة بالنسبة للنقطة أ هو ١٨ × أ ر .

فيكون ١٨ × أ ر = ٦ × ٦ — ٢ × ٢٠ + ٤ × ٣٤ + ٣ × ٣٧
+ ٢ × ٥٣ = ٣٤٩

ومنه أ ر = $\frac{٧}{١٨}$ ١٩

اذن تكون المحصلة ١٨ جراما . ومستقيم عملها يقطع المستقيم أ و فى نقطة ر التى بعدها عن أ $\frac{٧}{١٨}$ ١٩ من السنتيمترات .

(تمارين ١٦)

(١) ا ب حـ مثلث ، ا ى عمودى على ب حـ . برهن على أن مجموعة القوى التى تمثلها ب أ ، ب حـ ، ى أ ، ى حـ ليس لها عزم بالنسبة الى كل من منتصفى أ حـ ، ب ى

(٢) ا ب حـ ى مربع وهناك أربع قوى قدر كل منها ق مؤثرة من ا الى ب ، من ب الى حـ ومن حـ الى ى ومن ى الى ا على التناظر فاذا كان ضلع المربع يساوى آ فأثبت أن عزم هذه القوى بالنسبة الى أى نقطة فى مستوى المربع يساوى ٢ ق آ

(٣) برهن على أنه اذا أثرت قوى على طول أضلاع مضلع مأخوذة بترتيب دائرى وكان كل ضلع يمثل القوة الواقعة عليه تماما كان عزم المجموعة ثابتا بالنسبة الى جميع النقط التى فى مستوى المضلع ويقاس بضعف مساحة المضلع .

(٤) اذا أثرت ثلاث قوى متوازية متحدة الاتجاه قدرها ٦ ، ٥ ، ٤ فى نقط على مستقيم تبعد عن طرفه بمقدار ٤ ، ٦ ، ٩ سنتيمترات فأوجد مقدار محصلتها ووضعها .

(٥) ثلاث قوى متوازية قدرها ٢ ، ٤ ، ٦ متجهة فى جهة واحدة تؤثر فى النقط ا ، حـ ، هـ التى على المستقيم ا ب حـ ء هـ . وقوتان موازيتان لها قدرهما ٣ ، ٥ متجهتان فى الجهة المضادة للأولى تؤثران فى النقطتين ب ، ء .

فاذا كان ا ب = ٦ سنتيمترات ، ب حـ = ٧ سنتيمترات ، حـ ء = ٨ سنتيمترات ، ء هـ = ٩ سنتيمترات فأوجد مقدار محصلة هذه القوى واتجاهها ووضعها

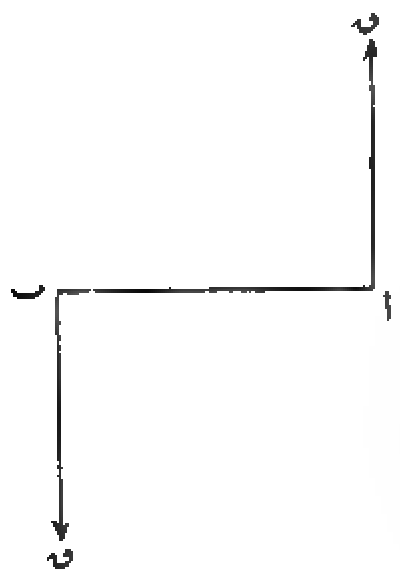
(٦) أوجد محصلة كل من مجموعات القوى المتوازية الآتية ومركزها :

(أولا) قوى متحدة الاتجاه قدرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٢ تؤثر فى الرءوس ا ، ب ، حـ ، ء من المربع ا ب حـ ء الذى ضلعه = آ

(ثانيا) قوى قدرها ١ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ، ١ ، ٢ متحدة الاتجاه تؤثر فى ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و التى هى رءوس مسدس منتظم ضلعه = آ

(ثالثا) أربع قوى متوازية منها اثنتان قدرهما ١ ، ٥ متحدتا الاتجاه تؤثران فى ا ، حـ والأخريان قدرهما ٢ ، ٢ فى اتجاه مضادّ لاتجاه الأوليين تؤثران فى ب ، ء ، ا ب حـ ء مربع طول ضلعه = آ

بند ٦١ — الازدواج .

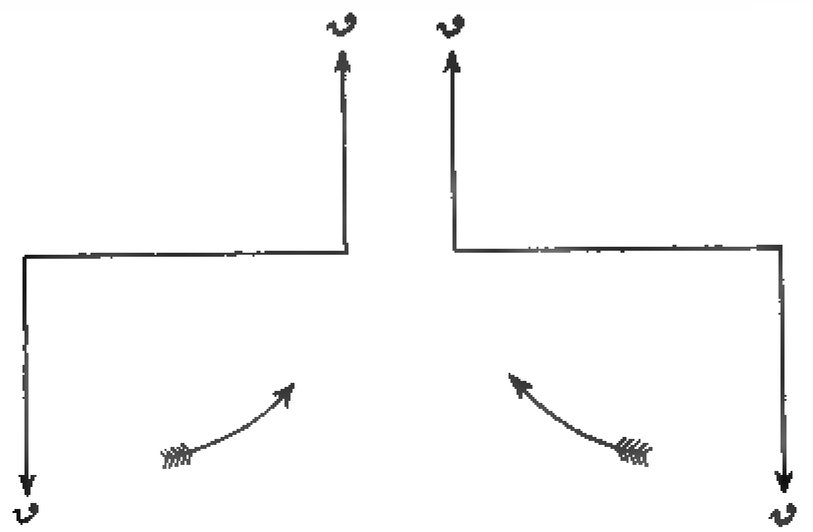


الازدواج فى الديناميكا عبارة عن قوتين متوازيتين متساويتين مختلفتى الاتجاه فاذا كانت ق احدى قوتى الازدواج ، ا ب المسافة العمودية بين مستقيمى عمل القوتين سمى ا ب ذراع الازدواج وحاصل ضرب القوة ق فى الذراع ا ب عزم الازدواج .

إذا حاولنا بالطريقة المبينة فى بند ٥٦ إيجاد محصلة القوتين اللتين تكونان ازدواجا نجد أن مقدار المحصلة صفر وأنه لا يمكن بالرسم إيجاد نقطة تأثيرها . و ينتج أنه

لا يمكن إيجاد قوة واحدة تكافئ القوتين المكونتين للازدواج . ومن حيث إنه إذا أثرت قوة واحدة فى جسم فانها تعمل على تحريكه بالنقل فى مستقيم عمل القوة ينتج أن الحركة التى تنشأ من عمل الازدواج لابد أن تكون غير حركة النقل ولا تكون حينئذ إلا حركة دوران .

ومن أمثلة الازدواج مانراه فى تأثير مغناطيسية الأرض فى طرفى إبرة مغناطيسية فالابرة تتزن فى وضع يشير فيه طرفاها الى الشمال والجنوب المغناطيسيين . واذا أزيحت من ذلك الوضع فان مغناطيسية الأرض تجذب أحد طرفيها وتطرد الآخر بقوتين متوازيتين متساويتين وتكونان ازدواجا يعمل على دورانها حتى ترجع الى وضع اتزانها .



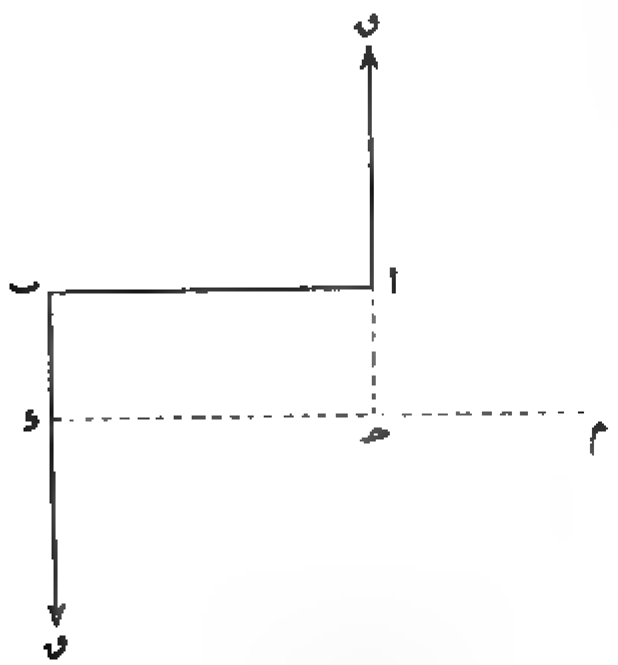
يجب أن يميز الازدواج الذى يعمل على إحداث دوران فى إتجاه مضاد لاتجاه تحرك عقربى الساعة من الازدواج الذى يعمل على إحداث دوران فى إتجاه تحركهما .

فالشكل الأيسر يبين إزدواجا من النوع الأول والشكل الأيمن يبين إزدواجا من النوع المضاد له . ويُدَل على الفرق بين نوعى الازدواج باستعمال المصطلحين الجبريين "موجب" و "سالب" باشارتيهما + ، — . ومن المعتاد أن نعتبر النوع الأول موجبا والثانى سالبا .

بند ٦٢ — نظريات ابتدائية على الازدواج .

(نظرية ١) المجموع الجبرى لعزمى القوتين اللتين تكونان ازدواجا بالنسبة لنقطة فى مستوى الازدواج يساوى عزم الازدواج .

نفرض أن ق ، ق قوتا الازدواج الذى ذراعه ا ب وأن م نقطة فى مستوى الازدواج ثم نرسم م ح ء عمودا على اتجاه القوتين فيكون المجموع الجبرى لعزمى القوتين بالنسبة للنقطة م هو :



ق × م ء − ق × م ح

= ق (م ء − م ح)

= ق × ح ء = ق × ا ب

(لأن ح ء = ا ب)= عزم الازدواج

فتثبت النظرية

من حيث إن عزم الازدواج هو معيار اندفاعه الى إحداث الدوران ينتج أن معيار اندفاع الازدواج الى إحداث الدوران حول جميع النقط التى فى مستوى الازدواج ثابت فالازدواج ليس له علاقة خاصة بأى وضع فى مستويه فيمكن نقله فى مستويه من موضع الى آخر بدون تغيير تأثيره مطلقا . واذا حرك الازدواج من وضع الى آخر فى مستويه يجب مراعاة عدم تغيير اتجاه الدوران الذى يحدثه .

ومن حيث ان الازدواج يتعين بعزمه واتجاه الدوران الذى ينشأ منه يمكننا تغيير ذراعه اذا غيرنا مقدار القوة حتى لايتغير العزم .

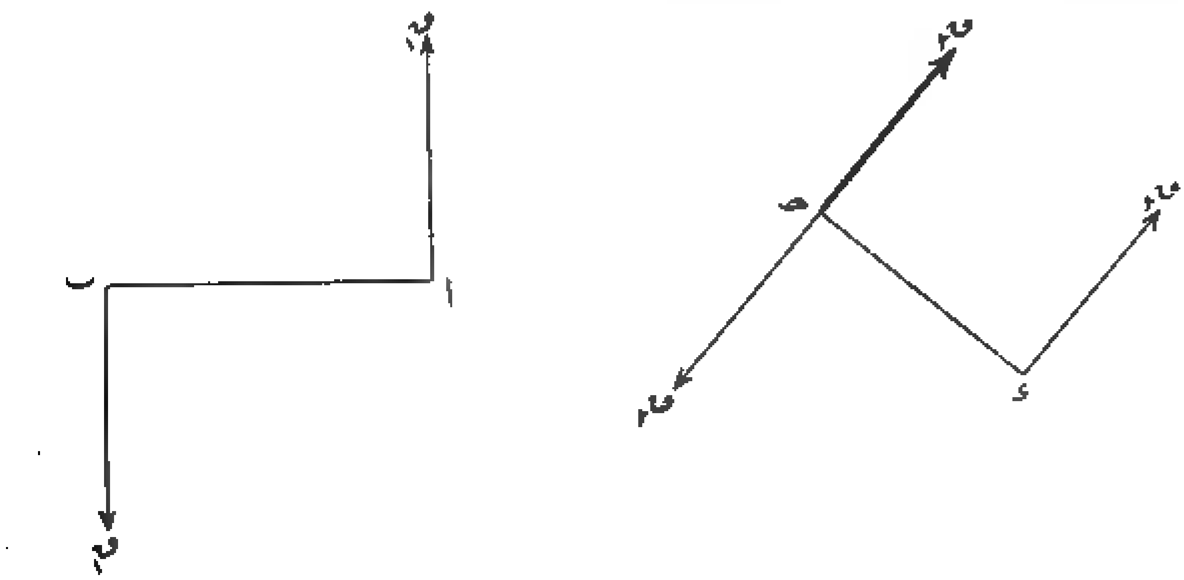
فنستنتج أن الازدواجين يتكافآن اذا اتحدا فى اتجاه الدوران وكان عزماهما متساويين

(نظرية ٢) <u>القوة المفردة والازدواج يكافئان قوة مفردة</u> .

اذا فرضنا أن الازدواج $ق_1$ ، $ق_1$ والقوة $ق_2$ يؤثران فى جسم صلب فان المحصلة تكون قوة واحدة هى $ق_2$ تؤثر فى نقطة أخرى غير ح

نغير قوة الازدواج $ق_1$ ، $ق_1$ الى $ق_2$ ونغير ذراعه بحيث لا يتغير عزمه ثم نديره فى مستويه حتى تكون إحدى قوتيه وهى $ق_2$ مضادة القوة المعلومة $ق_2$ فنكون قد وضعنا بدل الازدواج $ق_1$ ، $ق_1$ الذى ذراعه ا ب والقوة $ق_2$ المؤثرة فى ح المجموعة المكافئة لها التى تتكون من الازدواج $ق_2$ ، $ق_2$ الذى ذراعه ح ء والقوة $ق_2$ المؤثرة فى ح

وتتزن القوتان ق٢ و ق٢ المؤثرتان فى ح لأن اتجاهيهما متضادان فتبقى القوة المفردة ق٢ المؤثرة فى ء فالقوة المعلومة والازدواج يكافئان قوة مفردة .



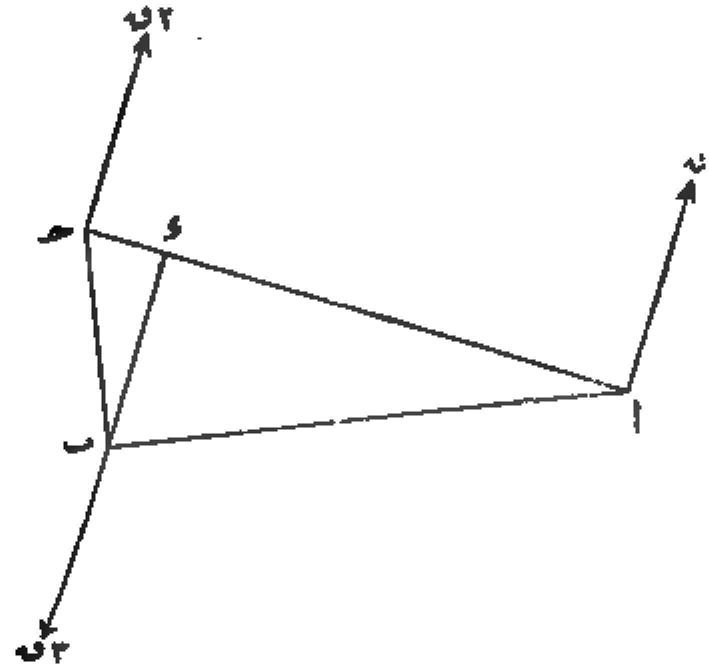
نستنتج من هذه النظرية أن القوة المفردة لا يمكن أن توازن ازدواجا لأن محصلة القوة المفردة والازدواج قوة مفردة دائما فلا يمكن أن يتوازنا .

(نظرية ٣) محصلة أى عدد من الازدواجات التى تؤثر فى مستو واحد هى ازدواج عزمه يساوى المجموع الجبرى لعزوم جميع الازدواجات .

من حيث ان الازدواجات تتعين بعزومها واتجاهات دورانها يتضح أن محصلة الازدواجين ازدواج عزمه مساو مجموع عزميهما اذا كان اتجاه دورانهما واحدا ، ومساو الفرق بين عزميهما اذا كان اتجاها دورانهما متضادين ، و بالاشارتين الجبريتين + و — كما هو مبين فى بند ٥٨ نعبر عن ذلك بأن نقول : إن المحصلة لازدواجين ازدواج عزمه مساو المجموع الجبرى لعزمى الازدواجين ، وكذلك اذا زاد عدد الازدواجات على اثنين .

(مثال ١) ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب و ا ب طوله ٢٤ سنتيمترا و ب ح طوله ١٠ سنتيمترات وقد أثرت فى ا قوة هى ق اتجاهها عمودى على ا ح وأثرت فى ح قوة هى ٢ ق فى الاتجاه عينه و فى ب قوة هى ٣ ق فى الاتجاه المضاد فما عزم الازدواج الناتج ؟

أما كون المحصلة ازدواجا فظاهر من اعتبار أن القوة ق المؤثرة فى ا والقوة ٢ ق المؤثرة فى حـ محصلتهما قوة هى ٣ ق تؤثر فى نقطة بين ا ، حـ . ثم أن هذه القوة والقوة ٣ ق المؤثرة فى ب تكونان ازدواجا .



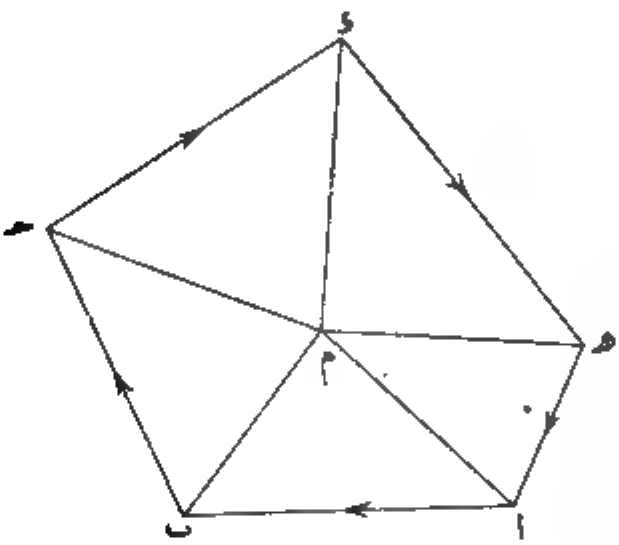
نفرض أن اتجاه القوة ٣ ق المؤثرة فى ب يقطع ا حـ فى ى فيكون ب ى العمود من رأس الزاوية القائمة على الوتر .

وعزم الازدواج يساوى المجموع الجبرى لعزوم القوى الثلاث بالنسبة لأى نقطة فى المستوى فاذا أخذنا النقطة ا يكون عزم ق المؤثرة فى ا صفرا وعزم ٣ ق المؤثرة فى ب هو ٣ ق × ا ى وعزم ٢ ق المؤثرة فى حـ هو ٢ ق × ا حـ . ومن حيث إن طول الضلعين ا ب ، ب حـ من المثلث ا ب حـ ٢٤ سنتيمترا ، ١٠ سنتيمترات ينتج أن طول ا حـ ٢٦ سنتيمترا وطول ا ى ٢٨٨/١٣ من السنتيمترات .

وعزم الازدواج الناتج هو :

٣ ق × ا ى − ٢ ق × ا حـ = ق (٣ × ٢٨٨/١٣ − ٢ × ٢٦) = ١٨٨/١٣ ق .

(مثال ٢) أثبت أن القوى التى تعمل فى أضلاع مضلع على الترتيب وتمثلها تلك الأضلاع تكافئ ازدواجا .



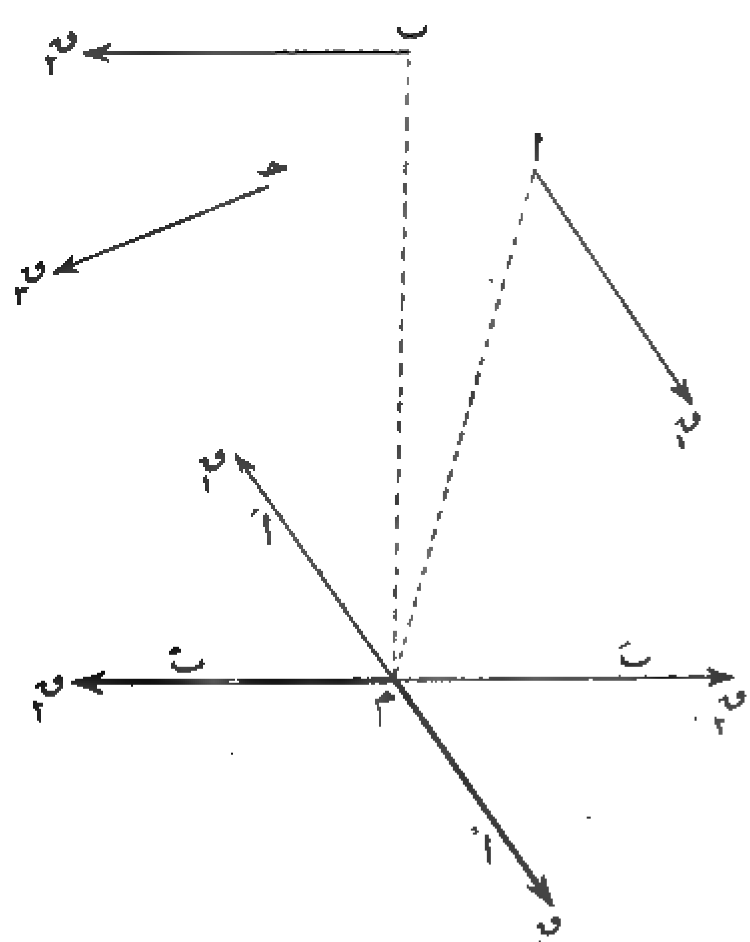
ا ب حـ ى هـ المضلع الذى تمثل أضلاعه القوى ويراد أن يبرهن على أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجا . نأخذ نقطة مثل م ونصل بينها وبين رءوس المضلع .

فيكون عزم القوة التى يمثلها ا ب ضعف مساحة المثلث ا م ب وعزم القوة ب حـ ضعف مساحة ب م حـ وهكذا . فمجموع عزوم جميع القوى ضعف مساحة المضلع . وهذه النتيجة تصح بأخذ نقطة ما فى مستوى المضلع فمجموعة القوى مكافئة ازدواجا .

بند ٦٣ — محصلة جملة ما من القوى التى تؤثر فى جسم وهى فى مستو واحد .

نفرض أن ق١ ، ق٢ ، ق٣ ... ... جملة القوى التى فى مستو واحد المؤثرة فى جسم وأن نقط تأثيرها ا ، ب ، حـ ... ... على التناظر .

نأخذ نقطة مثل م فى المستوى ونوقع قوتين تساوى كل منهما ق١ بحيث تؤثران فى الاتجاهين المتضادين م اَ ، م اً علما بأن المستقيم اَ اً يوازى اتجاه القوة ق١ المؤثرة فى ا فمن إن هاتين القوتين متساويتان ومتضادتا الاتجاه فهما تتزنان .



فلا يتغير تأثير المجموعة باضافتهما . ثم ان القوى الثلاث ق١ المؤثرة فى ا ، ق١ التى تعمل فى م اَ ، ق١ التى تؤثر فى م اً تكافئ قوة واحدة هى ق١ التى تعمل فى م اً وازدواجا يتركب من القوتين ق١ التى تعمل فى م اَ ، ق١ التى تؤثر فى ا

فيمكن أن نضع بدل القوة المفردة ق١ المؤثرة فى ا قوة واحدة هى ق١ تعمل فى م اً وازدواجا عزمه ق١ × العمود النازل من ا على اَ اً .

وكذا يمكن أن نضع بدل القوة المفردة ق٢ المؤثرة فى ب قوة هى ق٢ تعمل فى م بً وازدواجا عزمه ق٢ × العمود النازل من ب على بَ بً وهكذا نفعل بالقوى الأخرى من المجموعة . وينتج من ذلك أن جملة القوى ق٣ المؤثرة فى ا ، ق٢ المؤثرة فى ب ، ق٣ المؤثرة فى حـ .... تكافئ جملة من القوى هى ق١ التى تعمل فى م اً ، ق٢ التى تعمل فى م بً ، ق٣ التى تعمل فى م حـً .... وجملة من الازدواجات . ثم إن محصلة جملة القوى المؤثره فى م قوة واحدة ومحصلة جملة الازدواجات ازدواج واحد .

فنستنتج أن جملة القوى التى فى مستو واحد المؤثرة فى جسم صلب تكافىء ازدواجا فى ذلك المستوى وقوة مفردة تؤثر فى نقطة مختارة منه . وتكون القوة المفردة ثابتة المقدار والاتجاه مهما كان موضع النقطة التى اختيرت . لأنها عبارة عن محصلة القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ ...... ومن الواضح أن عزم الازدواج الناتج يكون مساويا المجموع الجبرى لعزوم قوى المجموعة بالنسبة للنقطة م . فعزم ذلك الازدواج متعلق بموضع النقطة م .

بند ٦٤ — شروط توازن جملة من القوى المؤثرة فى جسم وهى فى مستو واحد —

يمكننا أن نستنتج من البند السابق الشروط التى بها تتوازن جملة من القوى المؤثرة فى جسم صلب . فقد رأينا فى البند السابق أن جملة القوى تكافئ قوة مفردة وازدواجا مفردا . ومن حيث إن القوة لايمكن أن توازن ازدواجا فلا بد أن تكون القوة المحصلة صفرا . وكذا يكون عزم الازدواج المحصل صفرا . ثم ان القوة المحصلة هى عين محصلة جملة قوى تساوى القوى الأصلية وتؤثر كلها فى نقطة مادية . فبمقتضى بند ٥٣ يكون أحد الشرطين هو :

(١) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى كل من اتجاهين متعامدين أيا كانا يجب أن يكون صفرا .

وقد رأينا أيضا أن عزم الازدواج المحصل يساوى المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة للنقطة م . ويستلزم التوازن أن يكون هذا العزم صفرا فى جميع أوضاع النقطة م فالشرط الثانى هو :

(٢) المجموع الجبرى لعزوم قوى المجموعة بالنسبة لكل نقطة فى مستوى القوى يجب أن يكون صفرا .

وبتطبيق هذين الشرطين يحصل الطالب على حل أى مسئلة فى الاستاتيكا الابتدائية .

بند ٦٥ — الجسم المقيد الحركة .

اذا كانت حركة الجسم مقيدة بحيث لايمكن أن يتحرك إلا بالنقل او الدوران لا بهما معا كانت شروط التوازن أخصر .

فاذا أمكن أن يتحرك الجسم بالنقل فى اتجاه واحد فقط فشرط التوازن أن مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الذى يمكن أن يتحرك فيه الجسم يساوى صفرا .

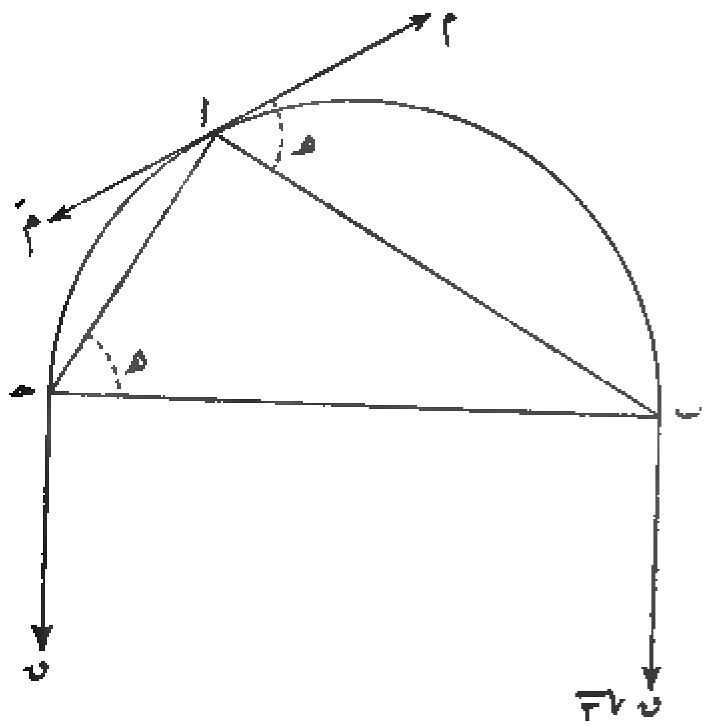
واذا كان بالجسم نقطة ثابتة بحيث لا يمكن أن يتحرك إلا بالدوران حولها فشرط التوازن أن المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لتلك النقطة يساوى صفرا .

(مثال ١) ثبت سلك أملس مستدير بحيث كان أفقيا وأمكن أن تتحرك عليه الحلقة الصغيرة ا .

فاذا كانت ا متصلة بخيطين يمران فى الحلقتين ب ، حـ على نهايتى قطر الدائرة ويحملان ثقلين النسبة بينهما $\sqrt{3}$: ١ فأثبت أن ا فى حالة السكون عندما يصنع حـ ا مع ب حـ زاوية قدرها ٦٠°

الحلقة ا لاتتحرك إلا على المنحنى حـ ا ب فشرط التوازن هو أن مركبات القوى فى اتجاه المماس للمنحنى تساوى صفرا .

نفرض أن النقطة ا فى الشكل تمثل وضع الحلقة فى حالة التوازن وأن هـ الزاوية التى يصنعها ا حـ مع ب حـ .



ومن حيث ان النسبة بين الثقلين المـارين من ب ، حـ هى √٣ : ١ أمكن أن نرمز اليهما بالرمزين ق √٣ ، ق فينشأ من هاتين القوتين الشد ق √٣ فى الخيط ا ب والشد ق فى الخيط ا حـ وهاتان القوتان لا غيرهما هما اللتان تميلان لاحداث حركة فى الحلقة على المنحنى .

اذن لا بد للتوازن من أن يكون المجموع الجبرى لمركبتى هاتين القوتين فى اتجاه المماس م ا مَ صفرا فيكون

ق √٣ جتا ب ا م — ق جتا حـ ا مَ = صفرا .

ثم ان الزاوية ب ا م تساوى الزاوية ا حـ ب ، هـ والزاوية حـ ا مَ المتممة للزاوية ب ا م تساوى ٩٠° — هـ .

فيكون

$$\text{ق } \sqrt{3} \text{ جتا هـ } - \text{ ق جا هـ } = \text{ صفرا .}$$

وبالقسمة على ق جتا هـ يحدث أن

$$\sqrt{3} - \text{ظا هـ} = \text{صفرا ، ظا هـ} = \sqrt{3}$$

فتكون الزاوية هـ ٦٠° أى أن ا حـ يصنع مع ب حـ زاوية قدرها ٦٠° .

(تمارين ١٧)

(١) أثرت قوتان متوازيتان مختلفتا الاتجاه قدرهما ٣٠ ، ٢٠ فى جسم وكان البعد بينهما ٦ سنتيمترات وفى منتصف المسافة بينهما قوة ثالثة قدرها ١٠ موازية القوة التى قدرها ٢٠ ومتحدة معها فى الاتجاه . أوجد عزم الازدواج المكون من هذه القوى .

(٢) ا ب حـ ء هـ مستقيم وقد أثرت ثلاث قوى متوازية متحدة الاتجاه قدرها ٣ ، ٥ ، ٧ فى ا ، حـ ، هـ وكان اتجاهها عموديا على المستقيم ا هـ . وأثرت قوتان متوازيتان قدرهما ١٣ ، ٢ فى ب ، ء وكان اتجاههما مضادا اتجاه القوى الثلاث. فاذا كانت ا ب ، ا حـ ، ا ء ، ا هـ تساوى ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ من السنتيمترات على الترتيب فأوجد عزم الازدواج الناتج .

(٣) ا ب حـ ء مستطيل وقد أثرت قوى قدرها ٥ ، ٣ ، ٥ ، ٣ من ا الى ب ومن حـ الى ب ومن حـ الى ء ومن ا الى ء على التناظر . أثبت أن محصلة هذه القوى ازدواج .

(٤) ا ب حـ ء مربع ضلعه = ٢ أ وقد أثرت أربع قوى قدرها ١٦ ق ، ٤ ق ، ٤ ق ، ٩ ق من ا الى ب ومن ب الى حـ ومن حـ الى ء ومن ء الى ا على التناظر . أثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ قوة واحدة قدرها ١٢ ق مؤثرة فى مركز المربع وازدواج معين ثم أوجد عزم هذا الازدواج وظل الزاوية التى يصنعها اتجاه القوة المفردة مع ا ب .

(٥) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٤ سنتيمترات ، ب حـ = ٦ سنتيمترات وقد أثرت قوة قدرها ٦ من ا الى ب وثانية قدرها ١٦ من حـ الى ب وثالثة قدرها ١٢ من حـ الى ء ورابعة قدرها ١٥ من ء الى ا . حوّل هذه المجموعة الى قوة مفردة مؤثرة فى مركز المستطيل وازدواج معينا مقدار هذه القوة وعزم الازدواج .

(٦) ا ب حـ مثلث طول أضلاعه ب حـ ، حـ ا ، ا ب ١٣ ، ١٢ ، ٥ من السنتيمترات وقد أثرت قوى قدرها ١٢ ، ٥ ، ١٣ من ا الى ب ومن ب الى حـ ومن حـ الى ا . حوّل هذه المجموعة الى ازدواج وقوة مفردة مؤثرة فى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث معينا مقدار هذه القوة وعزم الازدواج .

الباب الخامس — قوة التثاقل

الفصل الأول

الاستاتيكا

بند ٦٦ — مركز الثقل .

رأينا فى بند ٣٨ أن القوة التى تجعل الجسم يسقط الى الأرض هى قوة جذب تؤثر بها الأرض فيه وتسمى بقوة التثاقل . ورأينا أيضا أن مقدار هذه القوة المؤثرة فى جسم ما يتغير فى مكان واحد بتغير كتلته . فاذا تصورنا تجزأ الجسم الى عدد لا نهاية له من الأجزاء الصغيرة فان كلا منها ينجذب الى الأرض بقوة تناسب كتلته .

ويمكن اعتبار قوة التثاقل المؤثرة فى الجسم (أى ثقل الجسم) محصلة لعدد لانهاية له من القوى واذا كانت محصلة هذه المجموعة من القوى تمر دائما بنقطة ثابتة فى الجسم مهما كان وضعه بالنسبة للأرض فانها تسمى مركز ثقل الجسم .

بند ٦٧ — مركز القصور الذاتى .

اذا تصورنا كما فى البند السابق أن جسما يتكون من عدد لانهاية له من الأجزاء الصغيرة التى قد أثرت فيها مجموعة من القوى المتوازية بحيث تكون كل قوة مناسبة كتلة الجزء الذى تؤثر فيه فان مركز تلك المجموعة يسمى مركز القصور الذاتى للجسم .

فاذا كانت $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، $ك_{٣}$ ، .... كتل الأجزاء اللانهائية فى الصغر التى يمكن اعتبارها النقط المادية ا ، ب ، حـ .... فان مركز القصور الذاتى للجسم ينطبق على مركز مجموعة من القوى المتوازية التى تناسب $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، $ك_{٣}$ ..... مؤثرة على التناظر فى النقط ا ، ب ، حـ ، ....

فلايجاد مركز القصور الذاتى للجسم نتبع ماجاء فى بند ٥٧

نقسم المستقيم ا ب فى النقطة اَ بحيث يكون

$$ا اَ : ب اَ = ك_{٢} : ك$$

ثم نقسم المستقيم آ حـ في النقطة بَ بحيث يكون

$$\text{آ بَ : بَ حـ} = ك_٣ : ك_١ + ك_٢$$

وهكذا . فالنقطة التي نصل اليها في النهاية هي مركز القصور الذاتي للجسم . فيتضح أن مركز القصور الذاتي لجسم يمكن أن يعين بدون فرض وجود القوى . وأن موضعه إنما يتعلق بتوزع الكتلة على أجزاء الجسم .

بند ٦٨ — إن قوة جذب الأرض لنقطة مادية تتجه في المستقيم الواصل بين النقطة المادية ومركز الكرة الأرضية . فمحصلة قوى التثاقل في جسم (أى ثقله) هي محصلة مجموعة من القوى تمر جميعها بمركز الكرة الأرضية . ولما كانت المسافة بين مركز الأرض وجسم على سطحها كبيرة جدا بالنسبة الى أبعاد ذلك الجسم نرى أن المستقيمات الواصلة من مركز الأرض الى نقط جسم على سطحها يمكن اعتبارها متوازية بدون خطأ يذكر .

فينتج أن تأثير التثاقل في الجسم يمكن اعتباره محصلة لمجموعة من القوى تؤثر في نقطة في اتجاه يوازى المستقيم الواصل بين نقطة ما من الجسم ومركز الأرض بحيث تكون كل قوة مناسبة لكتلة النقطة المادية التي تؤثر فيها . فتكون محصلة تأثير التثاقل في الجسم قوة واحدة تسمى ثقله تؤثر في نقطة ثابتة هي مركز القصور الذاتي للجسم .

ويترتب على هذا الفرض أن مركز ثقل الجسم ينطبق دائما على مركز قصوره الذاتي ويستعمل المصطلحان بلا فرق وسنسمى مركز القصور الذاتي مركز الثقل .

(مثال) ثلاث نقط مادية هي ا ، ب ، حـ تقع على خط مستقيم وكتلها ٣ ، ٤ ، ٥ من الوحدات فاذا كان اب = ١٠ سنتيمترات ، ب حـ = ١٥ سنتيمترا فأوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث .

مركز الثقل لثلاث الكتل ينطبق على النقطة التي فيها يتقاطع المستقيم ا ب حـ ومحصلة القوى الثلاث المتوازية ٣ ، ٤ ، ٥ المؤثرة في ا ، ب ، حـ على التناظر .

ومحصلة هذه القوى قوة قدرها ٣ + ٤ + ٥ ، ١٢ وحدة

فاذا كانت ن هى النقطة التى فيها يتقاطع مستقيم عمل المحصلة مع ا حـ يكون

$$١٢ \ \text{ا ن} = ١٠ \times ٤ + ٢٥ \times ٥$$

$$= ١٦٥$$

ومنه ا ن = $١٣\frac{٣}{٤}$ من السنتيمترات

فمركز ثقل النقط المادية الثلاث هو نقطة على المستقيم ا حـ تبعد عن ا بمقدار $١٣\frac{٣}{٤}$ من السنتيمترات

بند ٦٩ — مركز ثقل الأجسام المتماثلة .

سنعتبر دائما عند ايجاد مركز الثقل أن الأجسام متجانسة الكثافة مالم يذكر عكس ذلك. و فى الحالة التى فيها يكون للجسم مركز تماثل أى اذا كان الجسم متماثلا بالنسبة لنقطة معلومة ينطبق مركز الثقل على مركز التماثل .

ومثال الأجسام المتماثلة الكرة وجسم القطع الناقص والمكعب . فمركز تماثل كل من الكرة وجسم القطع الناقص هو المركز الهندسى . ومركز تماثل المكعب هو نقطة تقاطع أقطاره . فمركز ثقل الكرة هو مركزها . وكذلك مركز ثقل جسم القطع الناقص. ومركز ثقل المكعب هو نقطة تقاطع أقطاره .

ومركز ثقل قضيب مستقيم منتظم هو نقطة فى المقطع المتوسط بين طرفيه فاذا لم تراع مساحة المقطع واعتبر القضيب خطا مستقيما أمكن أن تقول إن مركز ثقل الجسم هو منتصف القضيب .

والجسم الذى على هيئة لوح أو صفيحة رقيقة منتظمة السمك يكون مركز ثقله فى مستو متوسط بين وجهيه .

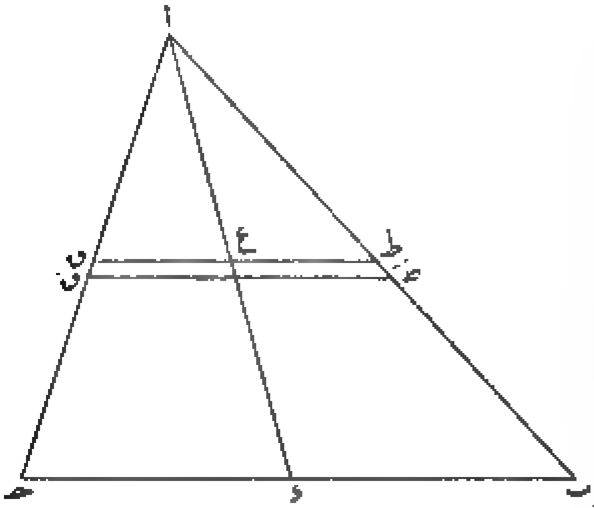
فاذا كان سمك اللوح صغيرا جدا حتى يمكن إهماله اعتبر اللوح سطحا أى جسما له طول وعرض وليس له سمك . غير أنه يختلف عن السطح فى أن له كتلة فيكون له إذن مركز ثقل .

واذا كان للسطح مركز تماثل فهذه النقطة تكون مركز ثقله .

فمركز ثقل الدائرة هو مركزها . ومركز ثقل متوازى الأضلاع أو المستطيل أو المربع هو نقطة تقاطع القطرين .

بند ٧٠ — مركز ثقل المثلث .

نفرض أن ا ب حـ صفيحة مثلثية الشكل سمكها صغير جدا حتى يمكن إهماله ، ى منتصف ب حـ فسنبرهن أن مركز ثقل المثلث يقع على المستقيم ا ى .



يمكننا أن نتصور أن المثلث مركب من عدد لانهاية له من قطع ضيقة كل منها توازى قاعدته ونفرض أن ط ق قَ طَ تمثل إحدى هذه القطع التى يمكننا أن نفرض أن المستقيم ا ى يقطعها فى النقطة ع نظرا لضيقها اللانهائى . فيمكن اعتبار منتصف ط ق مركز ثقل هذه القطعة . ونبرهن الآن على أن ع هى منتصف ط ق

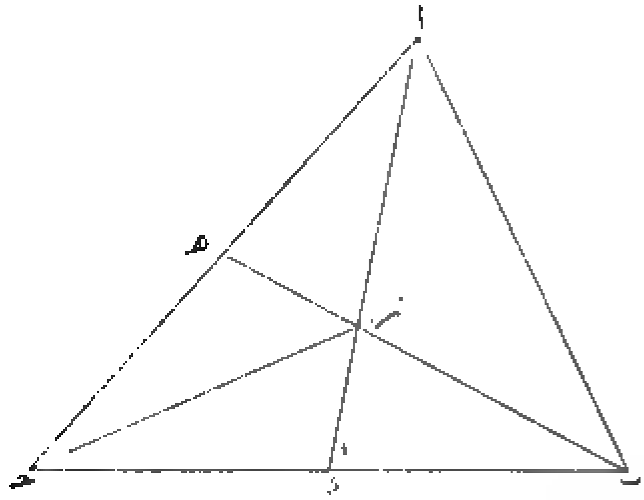
ط ع : ع ا = ب ى : ى ا

= حـ ى : ى ا (لأن ب ى = حـ ى)

= ع ق : ع ا

فيكون ط ع = ع ق أى أن ع منتصف ط ق فيقع مركز ثقل القطعة ط ق على المستقيم ا ى . وكذلك يقع مركز ثقل كل من القطع الأخرى على المستقيم ا ى . فيقع مركز ثقل المثلث على المستقيم ا ى .

وإذا كانت هـ منتصف الضلع حـ ا يبرهن بمثل ماتقدم على أن مركز الثقل يقع على ب هـ . فمركز الثقل لابد أن يكون النقطة ر نقطة تقاطع المتوسطين .



ومن حيث ان ى منتصف ب حـ فمساحة المثلث ا ب ى تساوى مساحة المثلث ا ى حـ ومساحة المثلث ب ر ى تساوى مساحة المثلث ر ى حـ

فينتج أن مساحة المثلث ا ب ر تساوى مساحة المثلث ا ر حـ

وكذا يبرهن على أن مساحة المثلث ب ن حـ تساوى مساحة المثلث ا ب ن . ومن حيث ان المساحات الثلاث ا ب ن ، ب ن حـ ، ا حـ ن متساوية فكل منها تساوى ثلث المثلث ا ب حـ أو ثلثى مساحة نصف ا ب حـ . فيكون ب ن حـ مساويا ثلثى ب هـ حـ وحينئذ يكون ب ن مساويا ثلثى ب هـ . وكذا يكون ا ن ثلثى ا ء فقد وصلنا الى النتيجة الآتية :

مركز ثقل المثلث هو نقطة تقع على المستقيم الممدود من أحد رءوسه الى منتصف الضلع المقابل بحيث تكون على بعد من الرأس يساوى ثلثى ذلك المستقيم .

(مثال ١) علقت الكتل ٤ ، ٣ ، ٥ كيلوجرامات على بعد ١ ، ٣ ، ٤ من الديسيمترات على التناظر من طرف رافعة طولها ٥ ديسيمترات وثقلها ٦ كيلوجرامات . أوجد مركز ثقل الرافعة والكتل .

نفرض أن ا ب و حـ ء هـ هى الرافعة وقد عُلقت كتلة ٤ كيلوجرامات من ب وكتلة ٣ كيلوجرامات من حـ وكتلة ٥ كيلوجرامات من ء



فكتلة الرافعة وهى ٦ كيلوجرامات يمكن تجمعها فى النقطة و مركز ثقل الرافعة ومنتصفها .

فالمطلوب اذن ايجاد مركز ثقل الكتل ٤ ، ٦ ، ٣ ، ٥ كيلوجرامات التى فى النقط ب ، و ، حـ ، ء على التناظر

نرمز الى مركز الثقل بالرمز ن فيكون

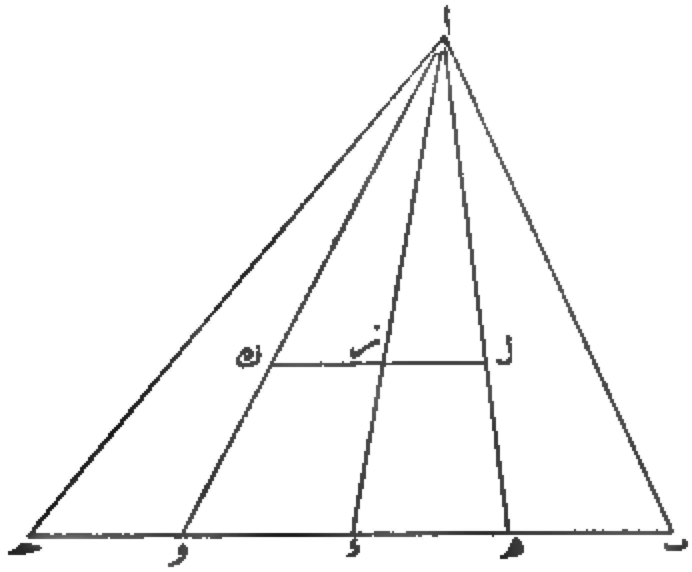
١٨ ا ن = ٤ × ١ + ٦ × ٢ ½ + ٣ × ٣ + ٥ × ٤

= ٤ + ١٥ + ٩ + ٢٠

= ٤٨

ومنه ا ن = ٤٨/١٨ = ٢ ⅔ من الديسيمترات

(مثال ٢) اذا كانت ى منتصف قاعدة المثلث ا ب حـ فأثبت أن المسافة بين مركز ثقل ا ب ى ومركز ثقل المثلث ا حـ ى تساوى ثلث ب حـ .



هـ ، و منتصفا ب ى ، ى حـ ، ن ، ل ، ك مراكز ثقل المثلثات ا ب حـ ، ا ب ى ، ا حـ ى على التناظر .

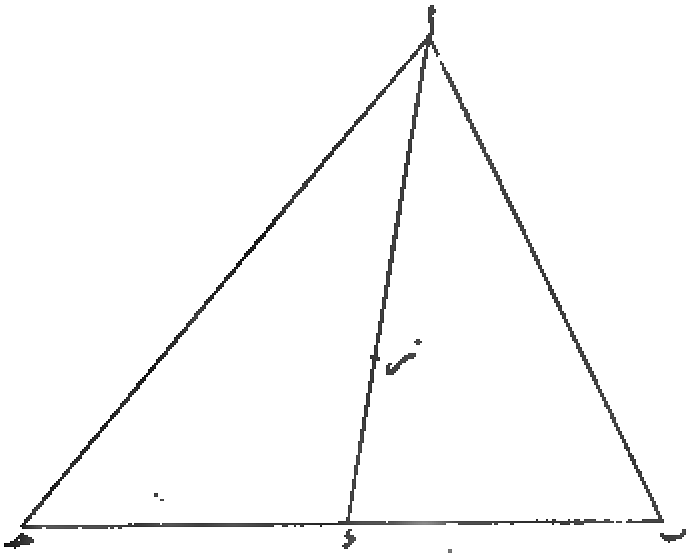
فمن حيث ان ن ، ل ، ك تقسم المستقيمات ى ا ، هـ ا ، و ا بنسبة واحدة .

فهذه النقط الثلاث تقع على مستقيم واحد يوازى ب حـ فيكون المثلثان ا ل ك ، ا هـ و متشابهين ويكون

ل ك : هـ و = ا ل : ا هـ

ولكن ا ل = $\frac{٢}{٣}$ ا هـ فحينئذ ل ك = $\frac{٢}{٣}$ هـ و ، هـ و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ
فيكون ل ك (المسافة بين مركز ثقل المثلث ا ب ى ومركز ثقـل المثلث ا حـ ى) = $\frac{١}{٣}$ ب حـ

(مثـال ٣) اذا وضعت ثلاث نقط مادية متسـاوية الكتلة على رءوس مثلث فأثبت أن مركز ثقلها ينطبق على مركز ثقل المثلث .



نفرض أن ك كتلة كل من النقط المـادية .

مركز ثقـــل الكتلة ك التى فى ب والكتلة ك التى فى حـ هو النقطـة ى منتصف ب حـ فيمكن حينئذ أن نضع بدل الكتلة

التى فى ب والكتلة التى فى حـ كتلة ٢ ك فى ء فهذه الكتلة والكتلة ك التى فى ا يكون مركز ثقلهما ن الذى يمكن تعيينه من التناسب

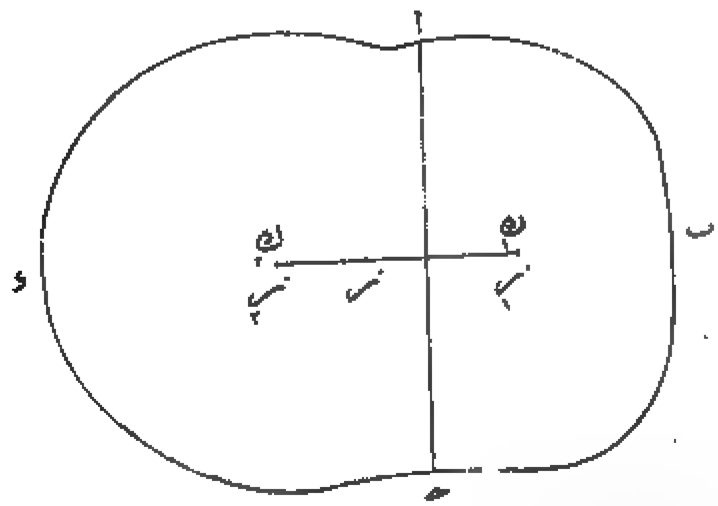
ء ن : ن ا = ك : ٢ ك

= ١ : ٢

فيكون ء ن نصف ا ن أو ثلث ء ا . فتنطبق ن على مركز ثقل المثلث ا ب حـ

بند ٧١ — جسم مكون من جزأين علم مركزا ثقلهما ونريد معرفة مركز ثقل الجسم بأجمعه .

نفرض أن الجسم ا ب حـ ء مكون من الجزأين ا ب حـ ، ا ء حـ وأن $ك_١$ ، $ك_٢$ كتلتاهما ، $ن_١$ ، $ن_٢$ مركزا ثقل الجزأين ا ب حـ ، ا ء حـ .



يمكننا أن نعتبر أن الكتلتين $ك_١$ ، $ك_٢$ تجمعان فى $ن_١$ ، $ن_٢$ فتؤول المسألة الى ايجاد مركز ثقل الكتلتين المعلومتين $ك_١$ فى $ن_١$ ، $ك_٢$ فى $ن_٢$ فاذا كان ن مركز ثقل الكتلتين تكون ن هى مركز ثقل ا ب حـ ء

وواضح أن ن تقع على المستقيم $ن_١$ $ن_٢$ ويمكن ايجاد موضعها من التناسب

$$ن ن_١ : ن ن_٢ = ك_٢ : ك_١$$

أى أن

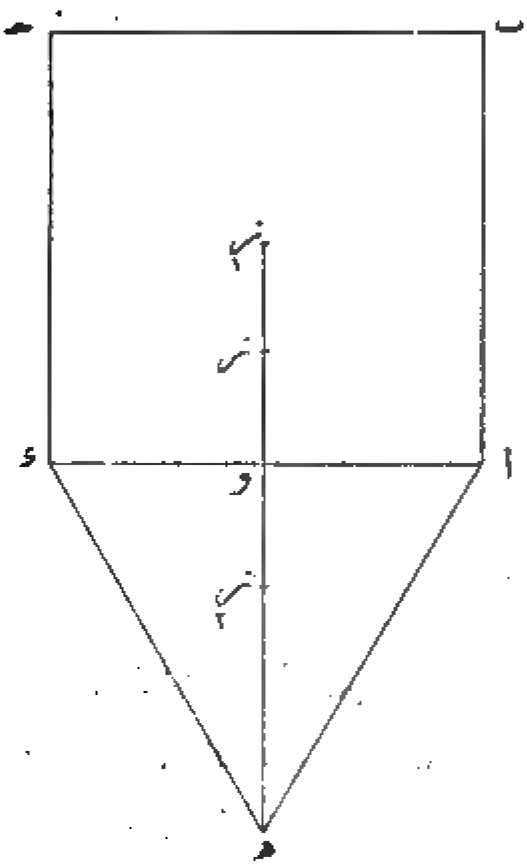
$$\frac{ن ن_١}{ن ن_٢} = \frac{ك_٢}{ك_١}$$

ومنه $\frac{ن ن_1}{ن ن_1 + ن ن_2} = \frac{ك_2}{ك_1 + ك_2}$

أو $\frac{ن ن_1}{ن_1 ن_2} = \frac{ك_2}{ك_1 + ك_2}$

ولما كان $ن_1 ن_2$ البعد بين مركزى ثقل الجزأين ا ب حـ ، ا ء هـ وطوله معلوم يمكننا أن نجد من المعادلة الأخيرة طول $ن ن_1$ وهو البعد بين مركز ثقل الجسم بأجمعه ومركز ثقل الجزء ا ب حـ

(مثال) رسم مربع على ضلع من مثلث متساوى الأضلاع . أوجد مركز ثقل الشكل المكون من المربع والمثلث .



نفرض أن ا ب حـ ء المربع وأن ا ء هـ المثلث المتساوى الأضلاع . فيكون مركز ثقل المربع هو مركز التماثل $ن_1$ ويتضح من تماثل الشكل أن $ن_1$ هـ يقطع ا ء فى متصفه عموديا عليه . فيقع مركز الثقل $ن_2$ للمثلث ا ء هـ على المستقيم $ن_1$ هـ ويستخرج بعده عن و من المعادلة

$$و ن_2 = \frac{1}{3} و هـ$$

فاذا رمزنا بالرمز ل الى ضلع المربع أو ضلع المثلث يكون

$$و هـ = ا هـ جا ٦٠° = \frac{ل \sqrt{3}}{2}$$

، $$و ن_2 = \frac{1}{3} و هـ = \frac{ل}{2\sqrt{3}}$$

وأيضا $$و ن_1 = \frac{1}{2} \text{ ضلع المربع}$$

$$= \frac{1}{2} ل$$

فيكون $$ن_1 ن_2 = \frac{1}{2} ل + \frac{ل}{2\sqrt{3}} = \frac{ل(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}$$

ثم ان كتلتى المربع والمثلث تتناسبان مع $ا^2$ ، $\frac{ا^2\sqrt{3}}{4}$ فاذا كانت $ن$ مركز ثقل الشكل بأجمعه يكون

$$ن\,ن_1 : ن\,ن_2 = \text{كتلة المثلث} : \text{كتلة المربع}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\,ا^2 : ا^2$$

$$= \sqrt{3} : 4$$

ومن ذلك نرى أن $\frac{ن\,ن_1}{ن\,ن_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $\frac{ن\,ن_1}{ن\,ن_1 + ن\,ن_2} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

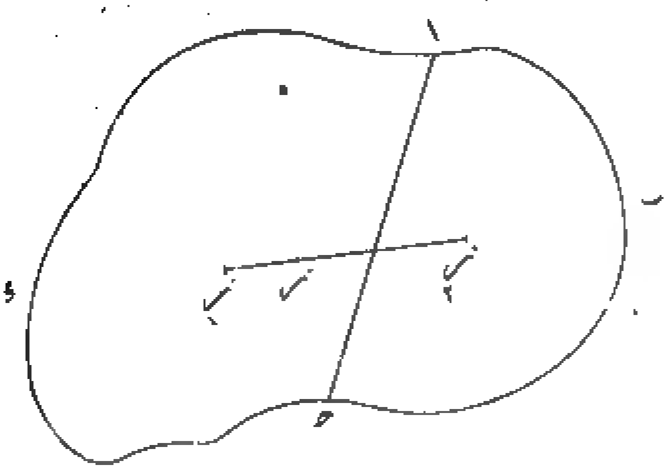
أو $\frac{ن\,ن_1}{ن_1\,ن_2} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

وبالاستعاضة عن قيمة $ن_1\,ن_2$ يحدث أن

$$ن\,ن_1 = \frac{ا}{2} \times \frac{\sqrt{3}+1}{4+\sqrt{3}}$$

بند ٧٢ — علمنا مركز ثقل جسم ومركز ثقل جزء منه ونريد إيجاد مركز ثقل الجزء الباقى .

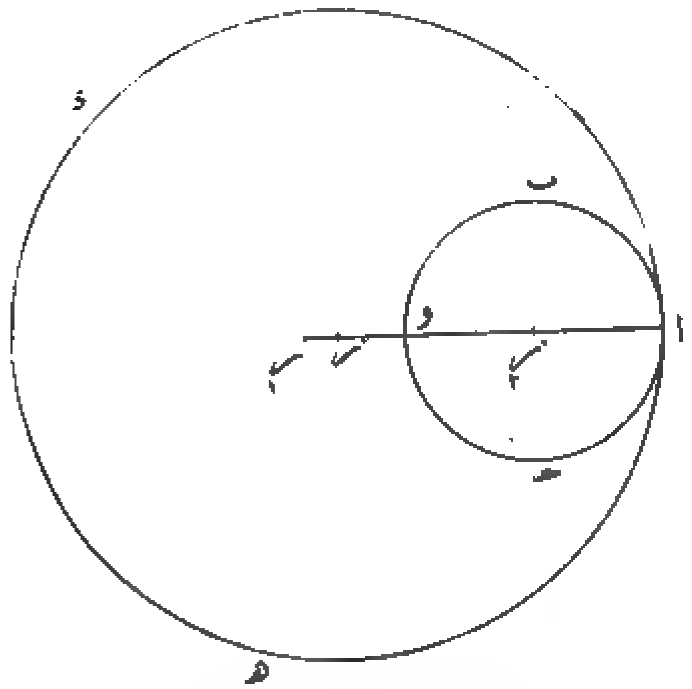
نفرض أن ا ب حـ ء هو الجسم المعلوم مركز ثقله $ن$. وأن ا ب حـ المعلوم مركز ثقله $ن_2$ قد قطع منه . ونريد إيجاد $ن_1$ مركز ثقل الجزء الباقى .



من حيث إن الجسم مركب من الجزأين ا ب حـ ، ا ء حـ اللذين مركزا ثقلهما هما $ن_2$ ، $ن_1$ نرى أن $ن$ مركز ثقل الجسم بأجمعه يقع بين $ن_1$ ، $ن_2$

فاذا كانت $ن$ ، $ن_2$ معلومتين ينتج أن $ن_1$ تقع على امتداد المستقيم $ن_2\,ن$ ولايجاد موضع $ن_1$ نضع معادلة تدل على أن نسبة $ن\,ن_1$ الى $ن\,ن_2$ تساوى عكس نسبة الجزء الباقى ا ء حـ الى الجزء المقطوع ا ب حـ .

(مثال) قرص مستدير من الخشب قطره ١٥ سنتيمترا ثقب بالقرب من حافته ثقبا مستديرا قطره ٦ سنتيمترات . أوجد مركز ثقل القطعة الباقية من القرص .



مركز ثقل القرص ا ء هـ بأكمله قبل ثقبه هو مركز القرص ن

نفرض أن ن١ هو مركز ثقل الجزء الباقى و ن٢ مركز ثقل الجزء المقطوع ا ب حـ فمن الواضح أن ن٢ هو مركز الدائرة ا ب حـ . ويمكن اعتبار القرص كله مركبا من الجزء المقطوع ا ب حـ والجزء الباقى وأن مركزى الثقل هما ن٢ و ن١ على التناظر فمن حيث أن ن مركز ثقل القرص بأكمله نستنتج أن

ن ن١ : ن ن٢ = كتلة الجزء المقطوع : كتلة الجزء الباقى

= مساحة الجزء المقطوع : مساحة الجزء الباقى

ولما كانت مساحة الدائرة تتناسب مع مربع قطرها ينتج أن النسبة بين مساحتى القرص بأكمله والجزء المقطوع كنسبة ١٥^{٢} : ٦^{٢} أى ٢٢٥ : ٣٦ فتكون نسبة مساحة الجزء المقطوع الى مساحة الجزء الباقى = ٣٦ : ٢٢٥ — ٣٦ أى ٣٦ : ١٨٩

فيكون ن ن١ : ن ن٢ = ٣٦ : ١٨٩

وأيضا ن ن٢ = ن و + و ن٢

= ١ ½ + ٣ = ٤ ½ من السنتيمترات

ومن ذلك ينتج أن $\frac{\text{ن ن١}}{٤\frac{١}{٢}} = \frac{٣٦}{١٨٩} = \frac{٤}{٢١}$

وحينئذ يكون ن ن١ = ٤ ½ × $\frac{٤}{٢١}$

= $\frac{٩}{٢}$ × $\frac{٤}{٢١}$ = $\frac{٦}{٧}$ من السنتيمتر

(تمارين ١٨)

(١) مكعبان من مادة واحدة حرف أحدهما يساوى ٤ سنتيمترات وحرف الآخر يساوى ٦ سنتيمترات . وضعا بحيث انطبق مركز أحد أوجه الأول على مركز أحد أوجه الثانى . أوجد مركز ثقل الجسم المركب منهما .

(٢) صفيحتان إحداهما مربعة والأخرى مستطيلة تشتركان فى ضلع واحد وقد وضعتا على مستوٍ واحد . فما يكون طول الضلع الآخر فى المستطيل حتى تتزن الصفيحتان حول الضلع المشترك علما بأنهما من مادة واحدة وأن سمك المربع ضعف سمك المستطيل ؟

(٣) مركز ثقل جرم باخرة يبعد بقدر ١٠٠ قدم عن مؤخرها ومركز ثقل الآلات البخارية يبعد بقدر ٩٠ قدما عنه أيضا أوجد مركز ثقل المجموعة بفرض أن ثقل الجرم قدر ثقل الآلات البخارية أربع مرات .

(٤) اقسم مربع بقطريه الى أربعة مثلثات وفصل أحدها عنه . أوجد البعد بين مركز ثقل باقى المربع وملتقى القطرين بفرض أن ضلع المربع يساوى ا

(٥) رسم مربع ومثلث متساوى الساقين على قاعدة واحدة فى جهتين متضادتين بحيث كانا متكافئين . عيّن مركز ثقل المجموعة بفرض أن القاعدة المشتركة تساوى ا

(٦) مثلث متساوى الأضلاع طول أحد أضلاعه يساوى ا فصل عنه مثلث بمستقيم مارّ بمنتصف أحد أضلاعه ومواز لضلع آخر . أوجد مركز ثقل الباقى .

(٧) قطعت قطعة على شكل مثلث من قرص دائرى نصف قطره يساوى قدما واحدة . فاذا ساوى كل ضلع من أضلاع المثلث نصف قطر القرص واتحد أحد رءوسه مع مركزه . فأوجد مركز ثقل باقى القرص .

(٨) لوح مربع ضلعه ٤ أقدام فصل منه قطعة مربعة ضلعها قدم واحدة بحيث تتوازى أضلاع المربعين ويقع منتصف أحد أضلاع القطعة المفصولة على مركز اللوح . أوجد مركز ثقل باقى اللوح .

(٩) أوجد طول الأعمدة النازلة على أضلاع صفيحة مثلثية منتظمة الكثافة من مركز ثقلها علما بأن أضلاعها تساوى ٥٢ ، ٥٦ ، ٦٠ سنتيمترا على التوالى.

(١٠) الزاوية الكبرى فى مثلث متساوى الساقين هى ١٢٠° . وقد رسمت الأعمدة من رأسه ومن منتصفى الضلعين على القاعدة . فاذا فرض أن أضلاعه وهذه الأعمدة الثلاثة قضبان منتظمة من مادة واحدة . فأثبت أن مركز ثقل الاطار المركب منها يبعد عن رأس المثلث بمسافة $\frac{١٣ + ٣\sqrt{٣}}{٢٤ + ٣\sqrt{٣}}$ ا علما بأن ا طول العمود النازل من الرأس .

(١١) ثلاثة مربعات متساوية السمك وهى من مادة واحدة وأضلاعها تساوى ا ، ا ، ٢ ا وضعت فى مستوٍ واحد بحيث وقع أحد رءوس كل على أحد رءوس أحد المربعين الآخرين . فانحصر بينهما مثلث أضلاعه هى أضلاع المربعات الثلاثة . أثبت أن مركز ثقل المربعات الثلاثة يقع على أحد أضلاع المربع الأكبر .

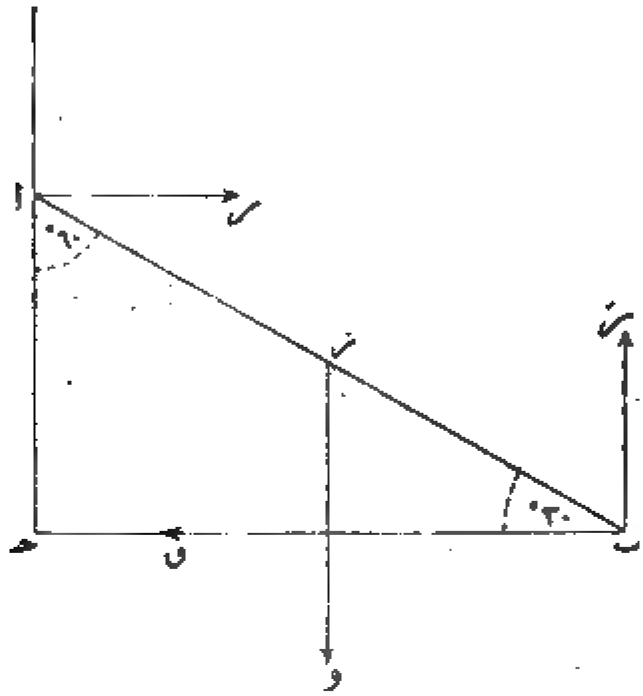
(١٢) نقطتان ماديتان كتلة كل منهما ك قد وضعتا فى طرفى المستقيم ا ب . وهناك نقطة مادية ثالثة كتلتها ك أيضا تتحرك على قوس دائرة وتره المستقيم ا ب . ما المحل الهندسى لمركز ثقل هذه النقط المادية ؟

بند ٧٣ — المسائل الاستاتيكية التى تتضمن قوة التثاقل .

عند حل المسائل الاستاتيكية التى تتضمن قوة التثاقل نفرض أن تأثير التثاقل فى الجسم يؤول الى قوة واحدة هى ثقل الجسم وأن هذه القوة تؤثر رأسيا فى مركز ثقله .

(مثال ١) يستند سلم منتظم ثقله و بأحد طرفيه على مستوٍ أملس أفقى وبطرفه الآخر على حائط أملس رأسى . وقوة ق تجعله ساكنا وهى تؤثر فى الطرف الأسفل من السلم وتقع عمودية على قاعدة الحائط أوجد الضغط على الحائط وعلى المستوى . وكذا مقدار القوة ق عندما يميل السلم على الاتجاه الرأسى بزاوية قدرها ٦٠° .

لنفرض أن الشكل يمثل مقطعا يمر بالسلم عموديا على الحائط قاطعا له فى المستقيم ا حـ ثم ننظر الى القوى المؤثرة فى السلم فنرى (أولا) تأثير التثاقل الذى يؤول الى القوة المفردة و وهى ثقل السلم المؤثر فى ر متصف ا ب ونرى (ثانيا) أن السلم يضغط على الحائط. فبمقتضى القانون الثالث فى الحركة لنيوتن يضغط الحائط على السلم بقوة تساوى قوة ضغط السلم وتضادها .



ومن حيث ان الحائط أملس تماما فلا احتكاك — الباب السادس — بينه وبين السلم فالضغط المتبادل بينهما لا بد أن يكون قوة عمودية على الحائط . فالقوة الثانية التى تؤثر فى السلم هى ر التى تؤثر فى ا واتجاهها أفقى .

وهناك قوة أخرى تؤثر فى السلم وهى القوة رَ المؤثرة رأسيا فى ب فانها عبارة عن الضغط بين الأرض والسلم . والقوة الباقية هى ن التى تؤثر فى ب فى اتجاه أفقى . وهذه القوى الأربع و ، ر ، رَ ، ن تجعل السلم فى حالة التوازن . والمطلوب إيجاد مقدار كل من القوى الثلاث ر ، رَ ، ن بدلالة و . لذلك نعبر جبريا عن شروط التوازن التى فى بند ٦٤ فتنتج ثلاث معادلات منها يمكن استخراج قيمة كل من ر ، رَ ، ن بدلالة و .

نرى أن المركبة الرأسية المتجهة الى أسفل لجميع القوى هى و — رَ والمركبة الأفقية المتجهة من الحائط الى الخارج هى ر — ن . فلا بدّ للتوازن من أن كلا من هاتين المركبتين يساوى صفرا فيكون

و — رَ = صفرا ، ر — ن = صفرا

أى و = رَ ، ر = ن ... ... (١) و (٢)

فمن المعادلة (١) تنتج قيمة رَ بدلالة و .

ثم نركب معادلة ثالثة بأن نعبر جبريا عن أن مجموع عزوم جميع القوى بالنسبة لنقطة ما يساوى صفرا . ويحسن أن نختار النقطة ب لأن قوتين تمران بها . فنرى أن عزم و بالنسبة الى ب هو و × ب ر جتا ٣٠° = و × $\frac{\text{اب}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\text{و × اب} \sqrt{٣}}{٤}$

وعزم ر بالنسبة الى ب هو — ر × اب × جتا ٦٠° ، — $\frac{\text{ر × اب}}{٢}$

وهو سالب لأن اتجاهه مضاد لاتجاه عزم و الذى اعتبرناه موجبا .

فمن حيث ان مجموع هذين العزمين يجب أن يكون صفرا ينتج أن

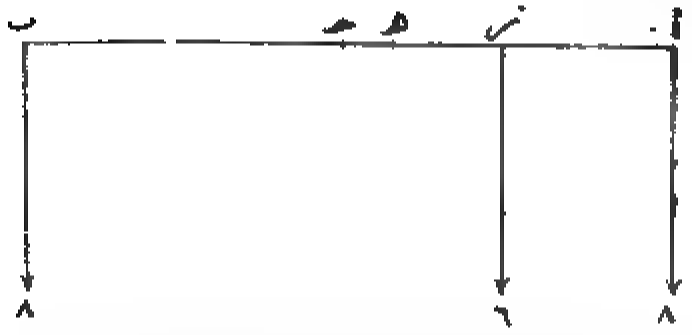
و × $\frac{\text{اب} \sqrt{٣}}{٤}$ — ر × $\frac{\text{اب}}{٢}$ = صفرا

ومنــه ر = $\frac{\text{و} \sqrt{٣}}{٢}$ .... (٣)

ومن المعادلتين (٢) ، (٣) ينتج أن

ر = ق = $\frac{\text{و} \sqrt{٣}}{٢}$

(مثال ٢) عُلق ثقلان قدر كل منهما ٨ كيلوجرامات فى طرفى رافعة مستقيمة طولها ٦٠ سنتيمترا وثقلها ٦ كيلوجرامات . فاتزنت فى نقطة تبعد عن منتصفها بأربعة سنتيمترات . أوجد مركز ثقل الرافعة .



نفرض أن ر مركز ثقل الرافعة فتكون القوى المؤثرة فيها هى ثلاث متوازية . (الأولى) وقدرها ٨ كيلوجرامات تؤثر فى ا . (والثانية) وهى ثقل الرافعة أى ٦ كيلوجرامات تؤثر فى ر . (والثالثة) وقدرها ٨ كيلوجرامات تؤثر فى ب وهذه القوى توازن ضغط الحامل على الرافعة فى النقطة هـ التى تبعد عن المنتصف حـ بمقدار ٤ سنتيمترات . فمجموعة القوى ٨ ، ٦ ، ٨ كيلوجرامات التى تؤثر فى ا ، ر ، ب على التناظر وقوة ضغط الحامل على هـ هى التى تجعل الرافعة

فى حالة التوازن . فينتج أن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى بالنسبة لنقطة ما فى مستويها يساوى صفرا . فاذا اخترنا النقطه هـ نرى أن

٦ × ن هـ + ٨ × أ هـ − ٨ × ب هـ = صفرا

ثم نفرض أن أ ن = س فمن حيث ان هـ تبعد عن حـ منتصف الرافعة بمقدار ٤ سنتيمترات ينتج أن أ هـ = ٢٦ سنتيمترا ، ب هـ = ٣٤ سنتيمترا ، ن هـ = أ هـ − س = (٢٦ − س) من السنتيمترات فبالتعويض فى المعادلة السابقة يحدث أن

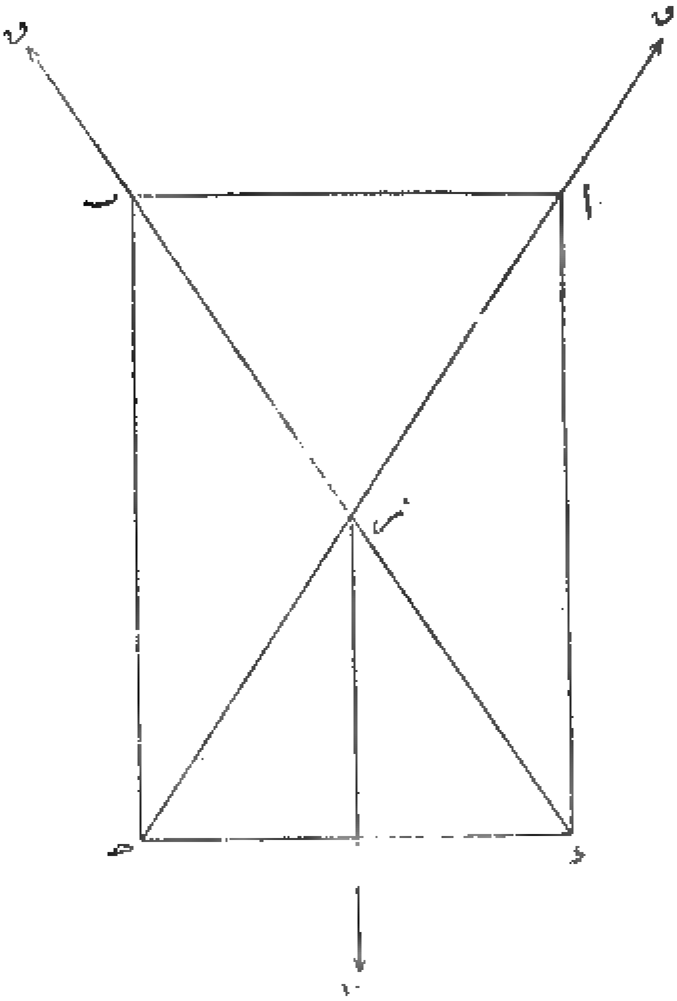
٦ (٢٦ − س) + ٨ × ٢٦ − ٨ × ٣٤ = صفرا

ومنه س = $\frac{٤٦}{٣}$ من السنتيمترات

فيكون مركز ثقل الرافعة بعيدا عن الطرف أ بمقدار $\frac{٤٦}{٣}$ من السنتيمترات .

(مثال ٣) باب ثقله ١٠٠ باوند واتساعه ٤ أقدام والمسافة بين مَفْصِليه ٦ أقدام .

أوجد مقدار الضغط على كل مَفْصِل بفرض أن كلا يحمل نصف ثقل الباب .



نفرض أن أ ب حـ ء هو الباب الذى يتصل بعموده بالمفصلين أ ، ء فمن الواضح أنه يضغط المفصل الأسفل ء ويشدّ المفصل الأعلى أ فبمقتضى قانون الحركة الثالث لنيوتن يعانى الباب ضغطا عند المفصل الأسفل وشدّا عند المفصل الأعلى ومن الفرض يتضح أن المركبتين الرأسيتين لهاتين القوتين تتساويان فتكون القوتان متساويتى الميل على الاتجاه الرأسى لأن مجموع

مركبتيهما الأفقيتين يساوى صفرا فتكون الزاويتان ا ى ب ، حـ ا ى متساويتين فاذا رمزنا بالرمزين ق ، ق الى الضغط فى ى والشد فى ا يكون الباب متزنا بتأثير القوى ق ، ق وثقل الباب الذى قدره ١٠٠ باوند المؤثر فى مركز الثقل .

وينتج أن هـذه القوى الثلاث تتلاقى فى نقطة واحدة لا بدّ أن تكون مركز الثقل لأن الزاوية ا ى ب تساوى الزاوية حـ ا ى

وبالتعبير عن أن المجموع الجبرى للمركبات الرأسية يساوى صفرا يحدث أن :

ق جتا ا ى ب + ق جتا حـ ا ى − ١٠٠ = صفرا

أى ٢ ق جتا ا ى ب = ١٠٠

ولما كان جتا ا ى ب = (ا ى)/(ب ى) = ٦/√(٣٦ + ٢٤) = ٦/√٥٢ = ٣/√١٣

ينتج أن ٢ ق × ٣/√١٣ = ١٠٠

ومنه ق = (١٠٠ √١٣)/٦ = (٥٠ √١٣)/٣ من الباوندات

(تمارين ١٩)

(١) قضيب طوله ٩ أقدام يتزن وحده فى نقطة تبعد عن أحد طرفيه بقدر ٤ أقدام فأين تضع نقطة الأرتكاز حتى يتزن القضيب اذا عُلق جسم ثقله ضعف ثقله فى هذا الطرف وآخر ثقله ٣ أمثال ثقله فى الطرف الآخر؟

(٢) تتزن رافعة مستقيمة وحدها فى نقطة تبعد عن أحد طرفيها بقدر ثلث طولها وتتزن فى منتصفها اذا عُلّق ثقلان قدرهما ٧ ، ١٢ من الكيلوجرامات فى طرفيها فما ثقلها ؟

(٣) رافعة منتظمة ثقلها كيلوجرام واحد عُلّق من طرفيها ثقلان قدرهما ٥ كيلوجرامات ، ١٠ كيلوجرامات فما بعد نقطة الارتكاز التى تتزن فيها عن منتصفها ؟

(٤) يتزن قضيب مستدق الطرف فى نقطة تبعد عن الطرف الغليظ بمقدار ثلث طوله فاذا عُلِّق من الطرف الرفيع ثقل يساوى ضعف ثقل القضيب فأين تكون نقطة الارتكاز التى يتزن فيها ؟

(٥) وضع طرفا قضيب على وتدين وعُلق من إحدى نقطه ثقل يساوى ثقله . فأين تقع هذه النقطة حتى يكون الضغط على أحد الوتدين ضعف الضغط على الآخر ؟

(٦) سلم منتظم وضع أحد طرفيه على الأرض والآخر على حائط رأسى بحيث كان المستوى الرأسى المار بالسلم عموديا على الحائط وكان كل من الأرض والحائط أملس فشدّ طرف السلم الأسفل بخيط الى نقطة فى الأرض بين السلم والحائط فاذا كان مقدار الشدّ فى الخيط مساويا نصف ثقل السلم فأثبت أن زاوية ميله على الأفق تساوى ٤٥° .

(٧) قضيب منتظم ثقله ١٢ جراما علق فى طرفيه ثقلان قدرهما ٦ جرامات ، ١٦ جراما . فأين نقطة الارتكاز التى يتزن فيها ؟

(٨) ا ، ب نقطتان فى مستقيم أفقى وهناك قضيب طوله = ا ب وثقله ٢٠ √٣ من الكيلوجرامات يدور بغير عائق حول مفصل فى ب . وقد ربط طرفه الآخر بخيط يمر على وتد فى ا ويحمل ثقلا قدره ١٠ كيلوجرامات .

أوجد زاوية ميل القضيب على الأفق فى حالة التوازن .

(٩) ا ب حـ مثلث فيه د حـ قائمة ، ب حـ أكبر من حـ ا . أوجد نقطة فى ب حـ بحيث لو علق منها المثلث كان وتره أفقيا .

(١٠) ا ب حـ ء لوح مربع قابل للدوران فى مستويه (وهو مستوٍ رأسى) حول نقطة ا وهناك قوة مؤثرة على طول ب حـ تجعل اللوح بحيث يكون ا ب رأسيا فيه . قارن بين هذه القوة وثقل اللوح .

(١١) عُلِّق قضيب مستقيم ثقله ٥ كيلوجرامات من مفصل بتثبيت أحد طرفيه فيه فاذا أثرت قوة أفقية قدرها ٣√٧٥ من الكيلوجرامات فى الطرف الثانى فأثبت أن القضيب يكون فى حالة التوازن عند ما يميل على الخط الرأسى بزاوية قدرها ٦٠°

(١٢) مثلث متساوى الساقين ثقله ٦ جرامات فما الثقل الذى يجب وضعه فى رأسه حتى يتزن فى منتصف العمود النازل من الرأس على القاعدة ؟

(١٣) وضعت كرة ثقلها ١٠٠ كيلوجرام على مستويين مائلين على المستوى الأفقى بقدر ٣٠° ، ٦٠° فما ضغط الكرة لكل منها ؟

(١٤) قضيب منتظم وضع طرفه ا على حائط رأسى أملس وكان طرفه الآخر ب محمولا بخيط مثبت فى النقطة حـ التى هى فوق ا تماما . فاذا كان طول القضيب اَ من الأقدام وطول الخيط بَ من الأقدام فما طول حـ ا . وما مقدار الشدّ فى الخيط ؟

(١٥) قضيب منتظم ثقله و يتحرك بغير عائق حول مفصل فى طرفه الأسفل . وقد علق ليميل على الاتجاه الرأسى بزاوية هـ بخيط يصل بين الطرف الأعلى له ونقطة فوق المفصل مباشرة على بعد منه مساوٍ لطوله . أثبت أن الضغط على المفصل يساوى و جتا $\frac{هـ}{٢}$ وأن اتجاهه ينصف الزاوية هـ

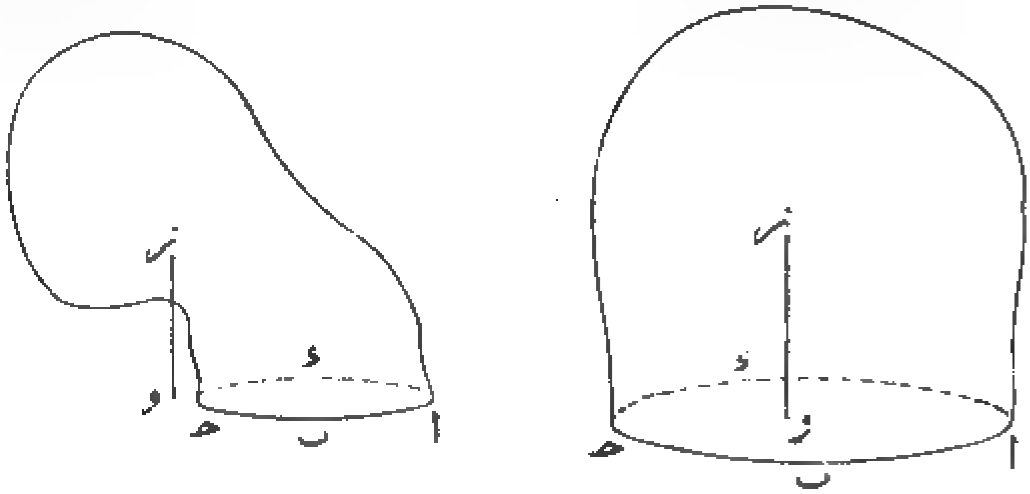
(١٦) أوجد وضع توازن عصا موضوعة فوق قضيب أفقى أملس اذا كان طرفها الأسفل على حائط رأسى أملس مواز للقضيب علما بأن طول العصا يساوى ١٦ قدما وبعد القضيب عن الحائط يساوى قدما واحدة .

(١٧) اتصل أربعة قضبان بعضها ببعض بمفاصل فكوّنت شبه منحرف فأقيم فى مستوٍ رأسى بحيث كانت قاعدته ا ب على مستوٍ أفقى وكان حـ ء موازيا ا ب ثم عُلّق ثقل قدره ١٢ كيلوجراما فى كل من حـ ، ء أوجد الانفعالات الحادثة فى القضبان اذا كان ا ب = ٢٢ ديسيمترا ، ء حـ = ا ء = ب حـ يساوى ١٢ ديسمترا أى هـذه الانفعالات يكون ضغطا وأيها يكون شدا ؟ (تهمل أثقال القضبان فى هذه المسألة) .

بند ٧٤ — أحوال توازن الأجسام تحت تأثير التثاقل والحوامل المثبتة .

اذا عُلق جسم من نقطة ثابتة وكان متأثرا بقوة التثاقل فقط فان شرط التوازن هو أن مركز ثقل الجسم يجب أن يكون على الخط الرأسى الذى يمر بنقطة التعليق فيكون فوقها أو تحتها .

واذا وضع جسم على مستوٍ أفق بحيث يلامس جزء من سطحه المستوى كما فى الشكلين فان الجسم يكون فى حالة التوازن اذا كان الخط الرأسى ن و المار بمركز الثقل يقابل



مضلع الارتكاز ا ب حـ ء كما فى الشكل الأيمن . ولا يكون فى حالة التوازن بل ينقلب اذا كان الخط الرأسى ن و لا يقابل مضلع الارتكاز ا ب حـ ء

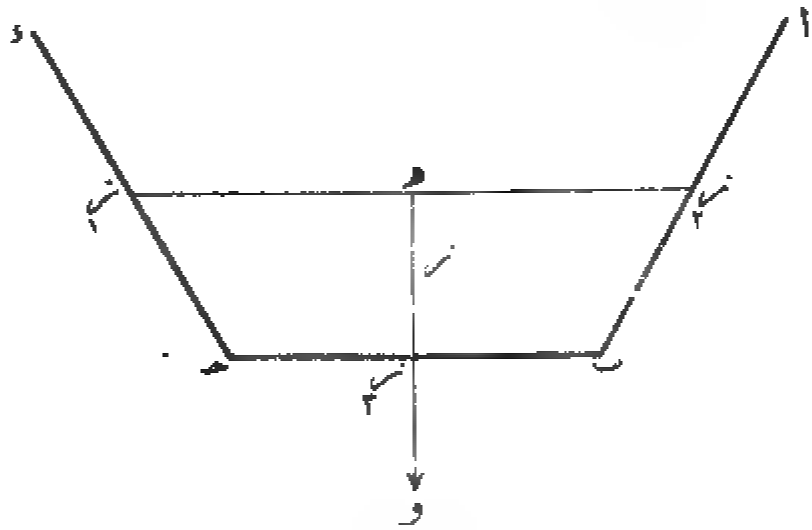
وكذلك اذا وضع جسم على مستوٍ أفق وكان مرتكزا على ثلاثة حوامل أو أكثر .

(مثال ذلك) نَضَد ذو ثلاث أرجل فان الجسم يتزن أو لا يتزن على حسب كون الخط الرأسى المار بمركز الثقل يقابل المضلع الذى رءوسه أطراف الأرجل أولا يقابله .

(مثال ١) ربطت ثلاثة قضبان منتظمة متشابهة مكونة إطارا على شكل نصف مسدس منتظم أثبت أن الاطار يتزن إذا وضع على الأرض فى مستوٍ رأسى وكان أحد القضبان افقيا .

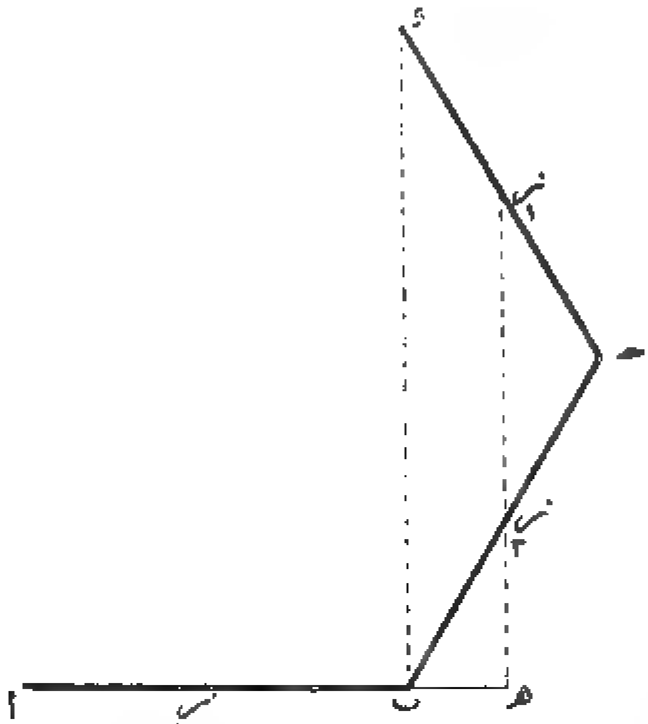
نفرض أن ا ب ، ب حـ ، حـ ء القضبان المكونة لنصف مسدس منتظم .

(أولا) اذا كان القضيب الأوسط أفقيا فان الاطار يتزن فى مستوٍ رأسى .



ن١ ، ن٢ هما مركزا ثقل القضيبين حـ ء ، ا ب وهما منتصفاهما . فاذا وصلنا ن١ ن٢ ونصفناه فى هـ فانها تكون مركز ثقل القضيبين ا ب ، حـ ء ولما كانت هـ على الخط الرأسى المار بالنقطة ن٣ مركز ثقل القضيب ب حـ ومنتصفه ينتج أن مركز ثقل القضبان الثلاثة هو نقطة ن التى تقع على هـ ن٣ فيمكن اعتبار ثقل القضبان الثلاثة قوة واحدة تتجه رأسيا وتمر بالنقطة ن٣ ومن حيث ان مستقيم عمل هذه القوة يقابل قاعدة الارتكاز فالاطار فى حالة التوازن .

(ثانيا) اذا كان أحد القضيبين المتطرفين أفقيا على الأرض مثل ا ب كان المستقيم ب ء عموديا عليه (هذه خصية من خواص المسدس) فيكون ب ء رأسيا .



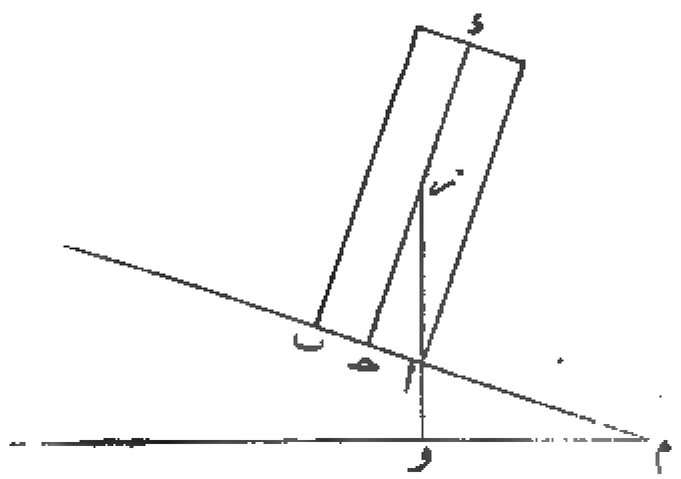
والمستقيم الواصل بين ن١ ، ن٣ منتصفى ب حـ ، حـ ء لابد أن يوازى ب ء فيكون رأسيا أيضا . نمد ن١ ن٣ ليقابل امتداد ا ب فى هـ ونرمز الى ثقل كل من القضبان بالرمز و فيكون ثقل القضيبين ب حـ ، ء حـ يكافئ الثقل ٢ و الذى يتجه رأسيا ويمر بالنقطة هـ ثم ان ب هـ = ب ن٣ جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ ب حـ جتا ٦٠° .

= $\frac{1}{4}$ ب حـ

فنحصل بذلك على قوة ٢ و التى تؤثر فى هـ وعلى أخرى وهى و تؤثر فى ن٢ وتتجه القوتان اتجاها رأسيا ومن حيث ان ب ن٢ = ٢ ب هـ ينتج أن المحصلة هى

قوة ٣ و تتجه رأسيا وتمر بالنقطة ب فمحصلة قوى تأثير التثاقل فى القضبان الثلاثة قوة واحدة تتجه رأسيا وتمر بالنقطة ب وهى نهاية قاعدة الارتكاز . فيكون الاطار فى الوضع النهائى لحالة التوازن .

(مثال ٢) وضعت أسطوانة ارتفاعها ثلاثة أمثال قطر قاعدتها على مستوٍ أفقى ثم أدير ليميل على الأفق على التدريج فاذا فرضنا أن الاحتكاك كافٍ لمنعها من الزلق فأوجد مقدار ميل المستوى على الأفق حين تأخذ فى السقوط .



نفرض ان الشكل ممثل قطاعا عموديا على المستوى يمر بمحور الاسطوانة حين توشك أن تسقط .

فتكون ز مركز ثقل الاسطوانة منتصف المحور حـ ء . وفى الوضع الذى فيه توشك أن تسقط يمر الخط الرأسى ز و بالنقطة ا .

فاذا رمزنا بالرمز هـ الى زاوية ميل المستوى م ا حـ ب على الأفق م و ينتج أن

$$هـ = \angle ا م و = \angle ا ز حـ$$

فيكون $$ظا هـ = \frac{ا حـ}{حـ ز} = \frac{ا ب}{حـ ء} = \frac{١}{٣}$$

ومن الجداول نجد أن ظا ٢٦َ ١٨° = $\frac{١}{٣}$

فتكون الاسطوانة مقاربة السقوط عند ما يميل المستوى على الأفق بزاوية قدرها ٢٦َ ١٨° .

بند ٧٥ — الاتزان الثابت والاتزان غير الثابت والاتزان المستمر

اذا اتزن جسم فى وضع معين بتأثير قوى معينة ثم انحرف قليلا عن ذلك الوضع فاننا نلاحظ إحدى الأحوال الآتية :

(أولا) إما أن يعود الى موضعه الأصلى .

(ثانيا) وإما أن يتحرك فيبعد عن موضعه الأصلى .

(ثالثا) وإما أن يتزن فى وضعه الجديد .

ففى الحالة الأولى يقال إن الجسم فى حالة اتزان ثابت فى الموضع الأصلى . وفى الحالة الثانية يقال إنه فى حالة اتزان غير ثابت. وفى الحالة الثالثة يقال انه فى حالة اتزان مستمر.

ومثال الاتزان الثابت البندول الساكن المعلق فاذا أزيح قليلا الى جهة من الجهتين اللتين يمكن أن يتحرك فيهما عاد فى الحال الى وضعه الأصلى ويتذبذب حواليه حتى يسكن والجسم الذى إحدى نقطه ثابتة يكون على العموم فى حالة اتزان ثابت اذا كان مركز الثقل أسفل النقطة الثابتة .

والاتزان غير الثابت كالذى يشاهد فى قضيب متزن فى وضع رأسى على اليد فاذا أزيح قليلا انحرف عن الوضع الرأسى وسقط والجسم الذى إحدى نقطة ثابتة يكون على العموم فى حالة اتزان غير ثابت اذا كانت النقطة الثابتة أسفل مركز الثقل .

والاتزان المستمر كالذى يشاهد فى كرة ساكنة على نضد أفقى . فاذا أزيحت قليلا فى أى اتجاه تبقى ساكنة فى وضعها الجديد . ويكون الجسم على العموم فى حالة اتزان مستمر اذا بقى مركز الثقل على ارتفاع ثابت قبل إزاحته وبعدها .

وليلاحظ أن الجسم قد يكون فى إحدى أحوال الاتزان مراعاة لازاحته فى اتجاه معين ويكون فى حالة أخرى منه مراعاة لازاحته فى اتجاه آخر .

فمثلا اذا وضعت قطعة من النقود وضعا رأسيا على حرفها فانها تكون فى حالة اتزان مستمر مراعاة لازاحتها فى مستويها وتكون فى حالة اتزان غير ثابت مراعاة لازاحتها فى أى اتجاه آخر . ولكن اتزانها العمومى يعتبر قليل الثبات .

ويكون الجسم أحيانا فى حالة الاتزان لتحركه بالدوران حركة سريعة ولايتعلق إيضاح هذا بالديناميكا الابتدائية . ومثال ذلك الدراجة فانها وهى ساكنة غير ثابتة الاتزان

اذا كانت فى وضع رأسى . ولكن تزيد درجة ثبات اتزانها اذا تحركت تحركا سريعا . ومثال ذلك أيضا لعبة الأطفال المسماة بالنحلة فهى فى حالة اتزان ثابت اذا كانت حركتها سريعة ويسمى ذلك بثبات الحركة .

الفصـــل الثانى

الكينيتيكا

بند ٧٦ — عجلة التثاقل .

رأينا فى بند (٣٨) أنه اذا لم تكن مقاومة الهواء تتحرك جميع الأجسام فى مكان معين بتأثير التثاقل فى اتجاه رأسى بحركة ذات عجلة ثابتة .

ورأينا أيضا أن عجلة التثاقل تتغير فى النقط المختلفة من سطح الأرض وأن قيمتها فى مثل مساحة انجلترا لا تختلف كثيرا عن ٣٢٫٢ بالوحدات الانجليزية أو ٩٨١ بالوحدات الفرنسية تقريبا .

وليلاحظ أن قيمة عجلة التثاقل لا تتعلق بخط العرض وحده بل بالارتفاع عن مستوى البحار أيضا ولكن هذا قليل جدا وسنهمله فيما يلى من هذا الباب .

ونرمز بالرمز ء الى عجلة التثاقل ونفرض دائما أن الحركة تحدث فى الفضاء الخالى من الهواء حتى لا يحتاج الى اعتبار مقاومته .

بند ٧٧ — الأجسام التى تتحرك فى اتجاه رأسى بتأثير التثاقل .

تحل المسائل التى تبحث فى حركة الأجسام فى اتجاه رأسى بفرض أن لها عجلة منتظمة فى الاتجاه الرأسى وتستعمل فى حل مثل هذه المسائل القوانين التى فى بند (٢٧) اذا وُضعت ء بدلا من حـ فى معادلاتها .

وتنقسم المسائل المتعلقة بحركة الأجسام فى اتجاه رأسى بتأثير التثاقل الى ثلاثة أنواع :

(١) المسائل التى فيها تُقذف قذفا رأسيا الى أسفل .

(٢) المسائل التى فيها تسقط بعد السكون .

(٣) المسائل التى فيها تُقذف قذفا رأسيا الى أعلى .

(١) الأجسام المقذوفة قذفا رأسيا الى أسفل .

نضع فى قوانين (بند ٢٧) ء بدلا من حـ . فاذا رمزنا بالرمز ع الى السرعة التى بها يقذف الجسم الى أسفل و بالرمز ف الى المسافة التى يقطعها أثناء سقوطه فى زمن د وبالرمز غ الى السرعة فى آخر ذلك الزمن يكون :

غ = ع + ء د ... ... (١)

ف = ع د + $\frac{١}{٢}$ ء د^{٢} ... ... (٢)

غ^{٢} = ع^{٢} + ٢ ء ف ... ... (٣)

(مثال) قذف جسم الى أسفل بسرعة ١٠ أقدام فى الثانية فما المسافة التى يقطعها فى سقوطه اذا استغرق ثلاث ثوان ابتداء من قذفه ؟ وما سرعته فى آخر ذلك الزمن ؟

هنا ع = ١٠ ، د = ٣ ، ء = ٣٢٫٢

فالمسافة التى قطعها الجسم فى ٣ ثوان

= ١٠ × ٣ + $\frac{١}{٢}$ × ٣٢٫٢ × ٩

= ١٧٤٫٩ من الأقدام

، غ وهى سرعته فى آخر الثوانى الثلاث

= ١٠ + ٣ × ٣٢٫٢ = ١٠٦٫٦ من الأقدام فى الثانية

(٢) الأجسام التى تسقط بعد السكون .

فى هذه الحالة ع = صفرا . فنستعمل قوانين الحالة الخاصة الأولى التى فى بند ٢٧ فنوضع ء بدلا من حـ .

غ = ء د (١) ف = $\frac{١}{٢}$ ء د^{٢} (٢) غ^{٢} = ٢ ء ف (٣)

(مثال ١) سقط جسم بعد السكون بتأثير التثاقل وبعد قطعه ١٠٠ قدم نقصت سرعته الى نصفها فما المسافة التى يقطعها فى الثانيتين التاليتين ؟

نرمز بالرمز غ الى سرعته بعد قطعه ١٠٠ قدم فيكون

غ^{٢} = ٢ × ٣٢٫٢ × ١٠٠ = ٦٤٤٠

ومنه غ = ٨٠٫٢ من الأقدام فى الثانية تقريبا

ولايجاد المسافة التى يقطعها فى سقوطه أثناء الثانيتين التاليتين نقول من حيث إن سرعته بعد قطعه ١٠٠ قدم هى ٨٠٫٢ من الأقدام فى الثانية وهى قد نقصت الى نصفها تؤول المسألة الى إيجاد المسافة التى يقطعها جسم قد قذف الى أسفل بسرعة ٤٠٫١ من الأقدام فى الثانية أثناء ثانيتين فتحل بالقانون (٢) من الحالة الأولى فاذا رمزنا الى المسافة بالرمز ف تكون

$$ف = ٤٠٫١ \times ٢ + \frac{١}{٢} \times ٣٢٫٢ \times ٢^{٢}$$

$$= ١٤٤٫٦ \text{ من الأقدام}$$

(مثال ٢) اذا سقط جسم بعد السكون فأوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية النونية من سقوطه .

المسافة التى يقطعها فى د من الثوانى هى $\frac{١}{٢}$ ء $د^{٢}$

والمسافة التى يقطعها فى زمن أقل من هذا بثانية أى فى (د — ١) من الثوانى هى $\frac{١}{٢}$ ء $(د - ١)^{٢}$. وواضح أن المسافة التى يقطعها فى الثانية النونية

= المسافة التى يقطعها فى د من الثوانى — المسافة التى يقطعها فى (د — ١) من الثوانى

$$= \frac{١}{٢} ء د^{٢} - \frac{١}{٢} ء (د - ١)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} ء (٢ د - ١)$$

(٣) الأجسام المقذوفة رأسيا الى أعلى .

اذا قذف جسم قذفا رأسيا الى أعلى بسرعة ع كانت له عجلة ء فى الاتجاه المضاد للاتجاه الذى فيه تقاس المسافة ف فنستعمل قوانين الحالة الخاصة الثانية التى فى بند ٢٧ فنضع ء بدلا من حـ

$$غ = ع - ء د \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (١)$$

$$ف = ع د - \frac{١}{٢} ء د^{٢} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (٢)$$

$$غ^{٢} = ع^{٢} - ٢ ء ف \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (٣)$$

فلايجاد المسافة التى يرتفعها الجسم عند قذفه قذفا رأسيا الى أعلى بسرعة ع والزمن د الذى يستغرقه فى الصعود الى أعلى نقطة يمكن أن يصل اليها نجعل غ = صفرا فى هذه القوانين فتكون قيمتا ف ، د الناتجتان الارتفاع والزمن المطلوبين ويجعل غ = صفرا فى القانون (٣) يحدث أن

$$\text{صفرا} = \text{ع}^2 - ٢ \text{ء ف}$$

ومن ذلك ف = $\frac{\text{ع}^2}{٢\text{ء}}$ وهو الارتفاع الذى يصل اليه الجسم

ويجعل غ = صفرا فى القانون (١) يحدث أن

$$\text{صفرا} = \text{ع} - \text{ء د}$$

ومنه د = $\frac{\text{ع}}{\text{ء}}$ وهو الزمن الذى يستغرقه فى الصعود الى أعلى نقطة يمكن أن يصل اليها .

(مثال ١) رُمى جسم رميا رأسيا الى أعلى بسرعة ٢٠٠ قدم فى الثانية فما الزمن الذى يستغرقه صاعدا ؟ وما الارتفاع الذى يصل اليه ؟

ماذا تكون أيضا سرعته وأين يكون موضعه بعد ٢ ، ٥ ، ٨ من الثوانى ؟

هنا ع = ٢٠٠ ، ونعتبر ء = ٣٢ فمن القانون يكون الزمن الذى يستغرقه صاعدا الى أعلى نقطة هو

$$\frac{\text{ع}}{\text{ء}} = \frac{٢٠٠}{٣٢} = ٦,٢٥ \text{ من الثوانى}$$

والارتفاع الذى يصعد اليه هو

$$\frac{\text{ع}^2}{٢\text{ء}} = \frac{٢٠٠^2}{٢ \times ٣٢} = ٦٢٥ \text{ قدما}$$

فالجسم يستغرق فى الصعود مدة ٦,٢٥ من الثوانى ويبلغ ارتفاع ٦٢٥ قدما

ولايجاد سرعته فى لحظة معينة نستعمل القانون (١)

فسرعته بعد ثانيتين = ٢٠٠ − ٢ × ٣٢

= ١٣٦ قدما فى الثانية

وسرعته بعد ٥ ثوان = ٢٠٠ — ٥ × ٣٢

= ٤٠ قدما فى الثانية

وسرعته بعد ٨ ثوان = ٢٠٠ — ٨ × ٣٢

= — ٥٦

ومن حيث ان النتيجة الأخيرة سالبة يتبين أنه بعد ٨ ثوان من اللحظة التى قذف فيها يكون قد وصل الى أعلى نقطة ثم سقط مدة فيها بلغت سرعته ٥٦ قدما فى الثانية رأسيا الى أسفل .

ولايجاد الارتفاع فى لحظة معينة نستعمل القانون (٢) .

فيكون الارتفاع بعد ثانيتين = ٢٠٠ × ٢ — ½ × ٣٢ × $٢^٢$.

= ٤٠٠ — ٦٤

= ٣٣٦ قدما

والارتفاع بعد ٥ ثوان = ٢٠٠ × ٥ — ½ × ٣٢ × $٥^٢$

= ٦٠٠ قدم

والارتفاع بعد ٨ ثوان = ٢٠٠ × ٨ — ½ × ٣٢ × $٨^٢$

= ٥٧٦ قدما

(مثال ٢) بأى سرعة يجب أن يقذف حجر قذفا رأسيا الى أعلى ليصل الى ارتفاع قدره ١٨٢ ياردة ؟

نفرض أن ع السرعة بالأقدام فى الثانية فمن حيث ان ١٨٢ ياردة = ٥٤٦ قدما والجسم الذى يقذف الى أعلى بسرعة ع يرتفع مسافة $\frac{ع^٢}{٢ ى}$ نجد أن

$$\frac{ع^٢}{٢ ى} = ٥٤٦$$

أو $ع^٢$ = ٢ ى × ٥٤٦ = ٢ × ٣٢ × ٥٤٦

= ٣٤٩٤٤

وبأخذ الجذر التربيعى نرى أن ع = ١٨٦,٩ من الأقدام فى الثانية .

فيجب أن يُقذف الى أعلى بسرعة ١٨٦,٩ من الأقدام فى الثانية .

(تمارين ٢٠)

[فى هذه المسائل تعتبر ء = ٣٢ اذا قدرت بالوحدات الانجليزية وتساوى ٩٨١ اذا قدرت بالوحدات الفرنسية]

(١) ما المسافة التى يقطعها جسم ساقط فى المدة التى تزيد فيها سرعته من ٤٠,٢٥ من الأقدام فى الثانية الى ٨٨,٥٥ من الأقدام فى الثانية ؟

(٢) رُمى حجر فى الاتجاه الرأسى الى أعلى بسرعة يصل بها الى ارتفاع ١٠٠ قدم فما سرعته وارتفاعه بعد $\frac{1}{4}$ ١ من الثوانى ؟

(٣) مدخنة ارتفاعها ٤٤٥ قدما فبأى سرعة يجب قذف رصاصة من الأرض فى الاتجاه الرأسى الى أعلى لتصل الى قمتها فى ثانية واحدة ؟ وما سرعتها عند ما تجاوز القمة ؟ والى أى ارتفاع تصعد ؟ وبعد أى مدة تصل الى الأرض ؟

(٤) رُمى جسم فى الاتجاه الرأسى الى أعلى بسرعة قدرها ١١٠ أقدام فى الثانية فبعد كم ثانية تكون سرعته ٦٦ قدما فى الثانية الى أسفل ؟

(٥) سقط جسم بعد السكون واستغرق فى سقوطه ثانيتين بتأثير التثاقل . فاذا بطل التثاقل بعد ذلك مدة ٦ ثوان ثم أخذ يؤثر مدة ثانيتين أخريين فما المسافة التى يكون الجسم قد قطعها فى الزمن كله ؟

(٦) سقط حجر بعد السكون واستغرق فى سقوطه ثانية واحدة فوقع على لوح زجاج وكسره ففقد بذلك نصف سرعته فما المسافة التى يقطعها فى الثانية التالية ؟

(٧) رمى جسم فى الاتجاه الرأسى الى أعلى بسرعة ١٠ أمتار فى الثانية فالى أى ارتفاع يصعد ؟ وبعد أى مدة يعود الى الأرض ؟

(٨) ما الزمن الذى يقطع فيه جسم ساقط بعد السكون مسافة ١٥٨٨ سنتيمترا ؟ وما سرعته فى نهايته ؟

(٩) قذفت رصاصة فى الاتجاه الرأسى الى أعلى بسرعة ١٦٤٠٠ سنتيمتر فى الثانية فما المسافة التى تقطعها فى الثانية عشرة وكذلك فى الثانية الثلاثين بعد قذفها ؟

(١٠) رُمى جسم فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى بسرعة ١٢٤ قدما فى الثانية وبعد مضى ثانيتين رمى آخر إلى أعلى بنفس تلك السرعة فعلى أى ارتفاع يتلاقى الجسمان ؟ وما سرعة كل منهما وقت التلاق ؟

(١١) اذا سقط جسمان من نقطة واحدة أحدهما بعد الآخر فأثبت أن المسافة بينهما تزيد زيادة منتظمة بزيادة الزمن .

(١٢) أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على مستقيم رأسى بحيث يكون
ا ب = ب حـ = حـ ء فاذا سقط جسم من ا بعد السكون فأثبت أنه يقطع المسافات ا ب ، ب حـ ، حـ ء فى أزمنة مناسبة للقادير

$$١ : \sqrt{٢} - ١ : \sqrt{٣} - \sqrt{٢} .$$

(١٣) سقط جسمان من نقطة واحدة أحدهما بعد الآخر بمدة ٣ ثوان فما المسافة بينهما بعد مضى ٣ ثوانٍ أخرى ؟

(١٤) قطع جسم ساقط مسافة ١٤٧٢,٥ من السنتيمترات وسرعته تزيد من ٩٨١ سنتيمترا فى الثانية إلى ١٩٦٢ سنتيمترا فى الثانية . فما قيمة ء فى مكان سقوطه بالوحدات الفرنسية ؟

(١٥) أوجد قيمة ء بالوحدات الانجليزية فى مكان يقطع فيه جسم ساقط بعد السكون مسافة ٢,٩٧٧ من الأقدام فى ٠,٤٣ من الثانية .

(١٦) سقط جسم بعد السكون فقطع نصف المسافة جميعها فى الثانية الأخيرة . أوجد جميع المسافة التى قطعها والزمن الذى استغرقه بالأقدام والثوانى .

(١٧) قطع جسم م من الأقدام فى الثانية النونية من سقوطه فماذا كانت سرعته الابتدائيــة ؟

(١٨) سقط جسم فوصل الى الأرض بسرعة غ فبكم ثانية قبل ذلك كان على ارتفاع قــدره م ؟

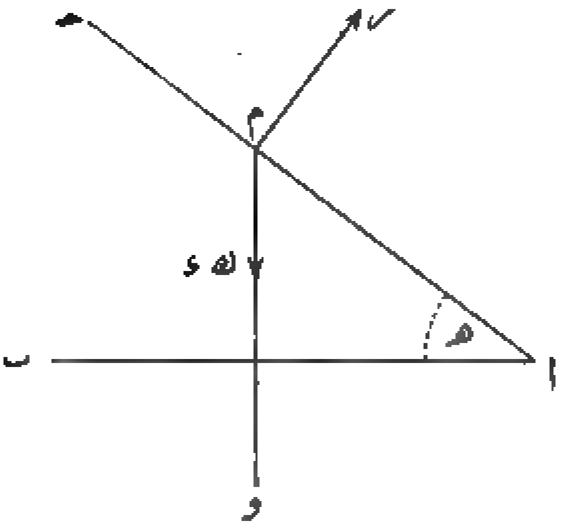
(١٩) تحرك جسم بعد السكون بتأثير قوة ثابتة . ففى الثانية العاشرة بعد تحركه قطع مسافة تساوى ضعف المسافة التى يقطعها جسم متحرك بتأثير التثاقل فى الثانية الخامسة بعد تحركه . قارن بين القوتين .

بند ٧٨ — أحوال أخرى للأجسام التى تتحرك بتأثير التثاقل بعجلة منتظمة .

يضاف إلى الحالة التى فيها يتحرك الجسم فى اتجاه رأسى أحوال فيها يتحرك بعجلة منتظمة مقيدا بشرط آخر . وسنبحث فى ثلاث منها :

(١) الحركة على مستو مائل .

نفرض أن م جسم على المستوى المائل ا حـ . ونعتبره نقطة مادية كتلتها ك ثم نرمز بالرمز هـ إلى الزاوية حـ ا ب التى يصنعها المستوى المائل مع الأفق . فالجسم م تؤثر فيه قوتان فقط إحداهما ردّ فعل المستوى ر والأخرى ثقل الجسم ك ء فى اتجاه رأسى الى أسفل .



فمن حيث ان ر تؤثر عمودية على المستوى لا يكون لها مركبة فيه . فلا تأثير لها فى الحركة عليه فتكون القوة التى تنشأ منها الحركة على المستوى مركبة القوة الرأسية ك ء عليه .

وهذه المركبة هى ك ء جتا و م ا

$=$ ك ء جا م ا ب $=$ ك ء جا هـ

فمن قانون الحركة الثانى تكون العجلة التى تحدثها هذه القوة فى الكتلة ك أثناء انحدارها على المستوى المائل .

$$\frac{\text{ك ء جا هـ}}{\text{ك}} = \text{ء جا هـ}$$

فاذا جعلنا هـ $=$ صفرا أى اذا فرضنا أن الجسم كان على مستو أفقى يكون جا هـ $=$ صفرا فالعجلة صفر كما نتوقع .

واذا جعلنا هـ $=$ ٩٠° أى اذا فرضنا أن ا حـ رأسى يكون جا هـ $=$ ١ وتكون العجلة هى ء وفى هذه الحالة تؤول المسألة إلى سقوط الجسم سقوطا رأسيا بدون قيد كما هو ظاهر .

(مثال) قذف جسم بسرعة ١٦٢ قدما فى الثانية على مستو مائل الى أعلى وقد صنع المستوى زاوية قدرها ٣٠° مع الأفق فتى يسكن ؟ وعلى أى بعد من نقطة القــذف ؟

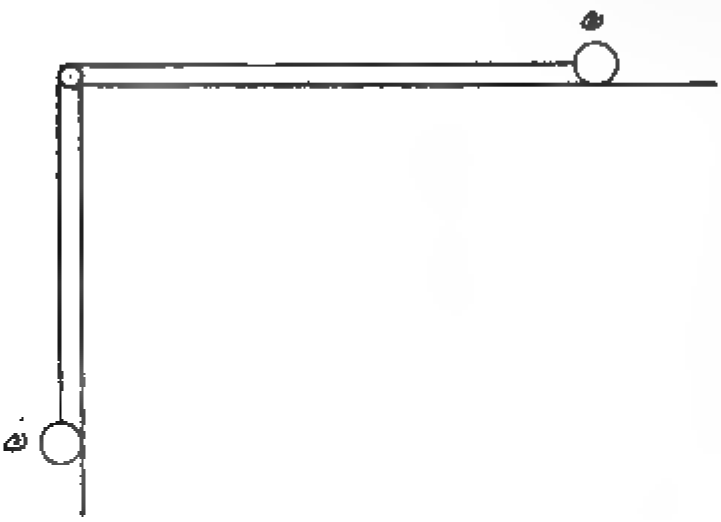
نستعمل قانون الحالة الثالثة من البند السابق فنضع ء جا ٣٠° بدلا من ء
ولما كان جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ يكون ء جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ء فالزمن والمسافة هما

$$\frac{ع}{\frac{١}{٢}ء} \text{ ، } \frac{ع^{٢}}{٢ \times \frac{١}{٢}ء}$$ على الترتيب .

ومن حيث إن ع = ١٦٢ ، ء = ٣٢ فالزمن = $\frac{١٦٢}{١٦}$ = ١٠,١٢٥ من الثوانى والمسافة = $\frac{١٦٢^{٢}}{٣٢}$ = ٨٢٠ من الأقدام تقريبا .

(٢) جسم كتلته ك على نضد أفقى وقد اتصل بكتلة أخرى هى كَ معلقة رأسيا بخيط يمر على بكرة على حرف النضد .

نعتبر أن الشدين فى الجزأين الأفقى والرأسى من الخيط متساويان فنكون قد أهملنا ثقل الخيط ولينه غير التام والقصور الذاتى للبكرة واحتكاكها . وهذا الشد هو القوة التى تؤثر وحدها فى ك تأثيرا أفقيا (مع إهمال الاحتكاك بين ك والنضد) فتتحرك ك على النضد فى المستقيم الواصل بين موضعها الأصلى والبكرة وتسقط الكتلة كَ سقوطا رأسيا .



ومن حيث إن الخيط يبقى مشدودا أثناء الحركة ينتج أن الكتلتين ك ، كَ تتحركان فى أى لحظة من مدة الحركة بسرعة واحدة وبعجلة واحدة .

نرمز بالرمز حـ الى عجلة كل منهما فى لحظة ما وبالرمز ش الى شد الخيط فى اللحظة عينها ونتأمل فى حركة الكتلة كَ فنرى أنها تتأثر بقوتين إحداهما ثقلها كَ ء

المؤثر تأثيرا رأسيا الى أسفل والأخرى الشدّ ش المؤثر تأثيرا رأسيا الى أعلى . وهاتان القوتان محصلتهما ك' ء — سـ التى تتجه اتجاها رأسيا الى أسفل . وبتأثيرها تسقط الكتلة ك' سقوطا رأسيا بعجلة ح . فمن القانون الثانى فى الحركة لنيوتن تكون المعادلة التى تدل على حركة ك' هى

ك' ح = ك' ء — ش ... ... (١)

وكذا تكون المعادلة التى تدل على حركة ك هى

ك ح = ش ... ... (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن

ح (ك + ك') = ك' ء

ومنـه $ع = \frac{\text{ك}'\,\text{ء}}{\text{ك} + \text{ك}'}$ ... ... (٣)

وبتعويض هذه القيمة فى المعادلة (٢) ينتج أن

ش = ك ح

$= \frac{\text{ك}\,\text{ك}'\,\text{ء}}{\text{ك} + \text{ك}'}$ ... ... (٤)

علما بأن ش معبر عنها بالوحدات المطلقة .

فمن (٣) ، (٤) ينتج أن مقدارى العجلة والشدّ ثابتان أثناء التحرك .

فهذه الحركة مثال للحركة المنتظمة العجلة وتتعين تعينا تاما بالمعادلتين (٣) ، (٤) .

(مثـال ١) اذا كانت ك = ١٤ باوندا ، ك' = باوندين فأوجد المسافة التى يقطعها الجسم ك' مستغرقا فى سقوطه ٣ ثوانٍ والسرعة المشتركة فى آخر ذلك الزمن والشدّ فى الخيط باعتبار ء = ٣٢

من (٣) تكون العجلة $= \frac{٢\,\text{ء}}{٢ + ١٤} = \frac{٦٤}{١٦} =$ ٤ أقدام فى الثانية فى الثانية .

فبمقتضى (بند ٢٧) تكون المسافة التى يقطعها الجسم فى ٣ ثوان ساقطا هى

$\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣^{٢} = ١٨$ قدما

وتكون السرعة المشتركة فى نهاية ذلك الزمن هى

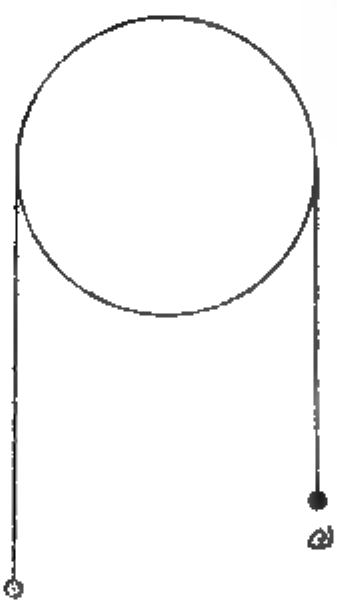
٣ × ٤ = ١٢ قدما فى الثانية

ومن (٤) يكون الشدّ فى الخيط هو

(٢ × ١٤ × ء) / (٢ + ١٤) = (٢٨ × ٣٢) / ١٦ = ٥٦ باوندالا

(مثال ٢) اذا كان طول الخيط ١٢ قدما وكانت ك : كَ = ٣ : ١٣ وبدأت كَ من موضع البكرة فأثبت أن الكتلة ك تسقط من النضد بعد ثانيتين .

(٣) حركة كتلتين مثل ك ، كَ متصلتين بخيط يمر على بكرة ملساء .



اذا كانت الكتلتان ك ، كَ متساويتين يتضح أنهما تتزنان وتبقيان ساكنتين ولكن اذا كانت إحدى الكتلتين (ك مثلا) أكبر من الأخرى كَ فان ك تأخذ فى الهبوط ، كَ فى الصعود . ومن الواضح أنه فى كل لحظة تكون سرعة ك وعجلتها الى أسفل مساويتين سرعة كَ وعجلتها الى أعلى .

فاذا رمزنا بالرمز ح الى العجلة وبالرمز ش الى الشدّ فى لحظة ما من مدة الحركة تكون المعادلة التى تدل

على حركة ك هى ك ح = ك ء − ش ... ... (١)

وعلى حركة كَ هى كَ ح = ش − كَ ء ... ... (٢)

وبجمع (١) ، (٢) يحدث أن

ح (ك + كَ) = ء (ك − كَ)

، ح = ء (ك − كَ) / (ك + كَ) ... ... (٣)

وبضرب (١) فى كَ ، (٢) فى ك ثم بالطرح ينتج أن

صفرا = ٢ ك كَ ء − ش (ك + كَ)

ومنه $ش = \frac{٢ ك ك َ د}{(ك + ك َ)}$ ... ... (٤)

ويستدل من النتيجتين (٣) ، (٤) على أن كلا من مقدارى العجلة والشد ثابت أثناء الحركة .

(مثال) خيط معلق على بكرة وُصل بأحد طرفيه كتلة قدرها ٥ باوندات وبالطرف الآخر كتلتان قدرهما ٣ باوندات ، ٤ باوندات . فاذا تحركت الكتل مدة ثلاث ثوان ثم نزعت الكتلة التى قدرها ٤ باوندات فأوجد الزمن الذى تستغرقه الكتلة التى قدرها ٥ باوندات صاعدة والمسافة التى تقطعها أثناء الصعود .

الطرف الذى تتصل به كتلتا ٣ ، ٤ باوندات يهبط والطرف الآخر يصعد فبمقتضى القانون تكون العجلة هى

$\frac{٧ - ٥}{٧ + ٥} \times د = \frac{د}{٦} = \frac{١٦}{٣}$ (لأن ك = ٣ + ٤ = ٧ ، ك َ = ٥)

فبعد ثلاث ثوان تكون السرعة المكتسبة = $\frac{١٦}{٣} \times ٣$ ، ١٦ قدما فى الثانية .

فالسرعة الصاعدة بها الكتلة التى قدرها ٥ باوندات عند نزع الكتلة التى قدرها ٤ باوندات تساوى ١٦ قدما فى الثانية وبعد نزعها يكون للكتلة التى قدرها ٥ باوندات عجلة الى أسفل قدرها

$$\frac{٥ - ٣}{٥ + ٣} د = \frac{د}{٤} = ٨$$

فتكون عجلة الكتلة التى قدرها ٥ باوندات الى أسفل فى المدة الثانية من الحركة هى ٨ أقدام فى الثانية . وتؤول المسألة الى ما يأتى :

ما الزمن اللازم لأن يسكن فيه جسم متحرك بسرعة ١٦ قدما فى الثانية وله عجلة سالبة قدرها ٨ ؟

نجعل ع = ١٦ ، ح = ٨ فى القانون الأول من الحالة الثانية فى بند ٢٧ فبذلك نستخرج ت من المعادلة :

$$\text{صفر} = ١٦ - ٨ ت$$

التى منها ت = ثانيتين

ولايجاد المسافة التى تقطعها الكتلة التى قدرها ٥ باوندات فى صعودها نجعل

غ = صفرا ، ع = ١٦ ، ح = ٨ فى القانون الثانى من الحالة الثانية من بند ٢٧

فيحدث أن صفرا = ١٦^{٢} — ٢ × ٨ × ف ومنه ف = ١٦

فالكتلة التى قدرها ٥ باوندات لا تزال صاعدة مدة ثانيتين وتقطع ١٦ قدما بعد نزع الكتلة التى قدرها ٤ باوندات .

بند ٧٩ — آلة أتود (Attwood) .

فى الحالة الأخيرة من أحوال الحركة فى البند السابق اذا كان الفرق بين الكتلة ك والكتلة كَ صغيرا جدا بالنسبة لاحداهما فان ك — كَ يكون صغيرا بالنسبة الى ك + كَ أى أن الكسر $\frac{ك - كَ}{ك + كَ}$ يكون صغيرا جدا ولا تكون العجلة إلا كسرا صغيرا من ء . فالحركة بطيئة جدا . فليس هناك صعوبة فى مشاهدة المسافة التى تقطعها ك أثناء سقوطها فى زمن معين مشاهدة تامة . ومن مثل هذه المشاهدة يمكن تعيين قيمة ء بالتقريب فى أى مكان على سطح الأرض لأنه اذا علم الزمن والمسافة يمكن تقدير العجلة ومن حيث إنها كسر معين من ء يمكننا فى الحال تقدير ء . وليست قيمة ء التى يحصل عليها بهذه الطريقة إلا تقريبا أوليا للقيمة الحقيقة . إذ لم يعتبر تأثير احتكاك محور البكرة على حواملها وكذا قصور البكرة .

ويتخلص من الاحتكاك فى آلة أتود بجعل البكرة ترتكز على عجلات تعرف بعجلات الاحتكاك بدلا من الحوامل المثبتة . ويوصل بكل من طرفى الخيط المار فوق البكرة صندوقان متساويا الكتلة . وتوجد الحركة بأن يوضع على أحدهما قضيب صغير من المعدن كتلته صغيرة اذا قورنت بكتلة الصندوق . أما الخطأ الناتج من عدم اعتبار القصور الذاتى للعجلة أى مقاومتها للدوران فيصحح بفرض أن كتلة كل من الصندوقين أكبر منها فى الواقع .

ولاجراء تجربة بآلة (أتود) يوضع قضيب المعدن على أحد الصندوقين فيعقب ذلك هبوط الصندوق الذى عليه القضيب وصعود الآخر . فالأول يمر أثناء هبوطه فى حلقة مستديرة بدون عائق ولكن القضيب لا يمر منها . فيبقى معلقا على جوانبها . فليس للصندوق الهابط حينئذ عجلة منذ ابتداء مروره فيها . ويؤخذ من ذلك أن الصندوق لا يزال يهبط بالسرعة التى كان عليها فى لحظة مروره منها . ولايجاد تلك السرعة نلاحظ المسافة التى يقطعها فى الثانيــة أثناء هبوطه بعد المرور من الحلقة . فيمكن تعيين عجلة التثاقل

فاذا رمزنا الى كتلة كل من الصندوقين بالرمز ك (بما فيه من التصحيح للخطأ الذى ينشأ من إهمال القصور الذاتى للبكرة) و إلى كتلة القضيب المعدنى بالرمز $\bar{ك}$ تكون عجلة الصندوقين (أحدهما الى أسفل والآخر الى أعلى) عند وضع قضيب المعدن هى

$$\frac{\bar{ك}}{٢ك+\bar{ك}}\ د$$

ثم تقاس المسافة (ف مثلا) من نقطة ابتداء هبوط الصندوق الى الحلقة .

وتقدّر سرعته (ع مثلا) أثناء مروره منها . فينتج أن جسما يكتسب السرعة غ بالعجلة المذكورة آنفا أثناء قطعه المسافة ف . فيكون

$$غ^{٢} = ٢\ \frac{\bar{ك}}{٢ك+\bar{ك}}\ د\ ف$$

ومن حيث ان مقادير غ ، ف ، ك ، $\bar{ك}$ معلومة تنتج من هذه المعادلة قيمة د

(مثـال) كل من الكتلتين المتساويتين فى آلة (أتود) ٩٤ باوندا . والكتلة الاضافية باوندان . والحلقة التى تعترضها تبعد عن النقطة التى تبدأ منها الكتلة الهابطة بمقدار قدم ، ٨ بوصات . فاذا كانت الكتلة الهابطة تقطع مسافة ١٢ قدما ، ٩ بوصات فى ١٢ ثانية بعد مرورها من الحلقة فأوجد عجلة التثاقل فى مكان التجربة .

العجلة فى هذه الحالة $= \frac{٢}{٢×٩٤+٢}\ د = \frac{د}{٩٥}$

وسرعة الكتلة الهابطة بعد قطعها مسافة قدم ، ٨ بوصات ساقطة بهذه العجلة .

$$= \sqrt{٢ × \frac{د}{٩٥} × ١\frac{٢}{٣}} = \sqrt{\frac{٢د}{٥٧}}$$

وهذه هى سرعة الكتلة وقت مرورها من الحلقة . وهى تقطع ١٢ قدما ، ٩ بوصات بعد مرورها منها أى أن سرعتها تكون .

$$\frac{١٢\frac{٩}{١٢}}{١٢}$$ من الأقدام فى الثانية

فيكون $\sqrt{\frac{٢د}{٥٧}} = \frac{١٢\frac{٩}{١٢}}{١٢} = \frac{٥١}{٤٨} = \frac{١٧}{١٦}$

وبتربيع طرفى المعادلة يحدث أن .

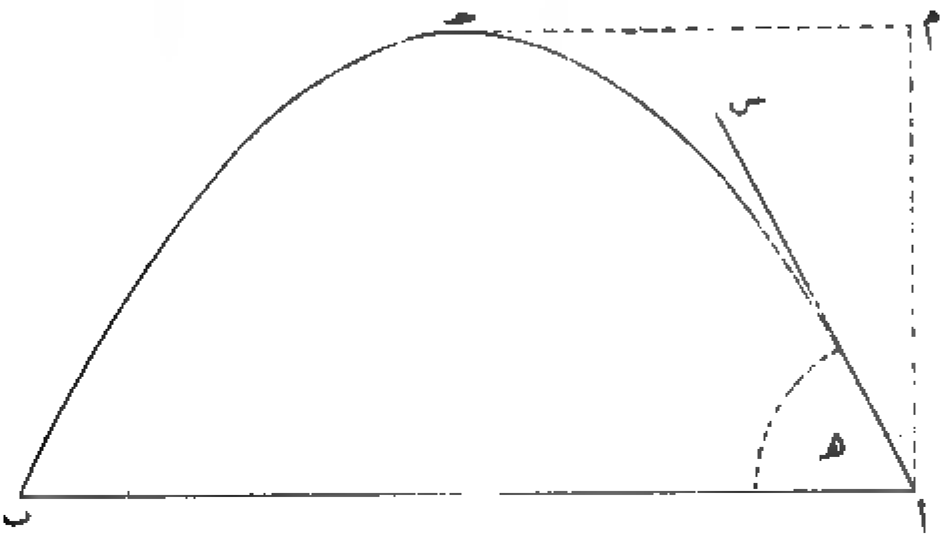
$$\frac{٢د}{٥٧} = \left(\frac{١٧}{١٦}\right)^{٢}$$

ومنـــه $د = ٣٢,١٧$ تقريبا .

بند ٨٠ — الأجسام المقذوفة فى اتجاه غير رأسى .

اذا قذف جسم فى اتجاه غير عمودى يمكن البرهنة على أن المنحنى الذى يرسمه أثناء سيره (اذا أهملت مقاومة الهواء) هو كالمنحنى ا حـ ب المبين فى الشكل ويسمى بالقطع المكافئ .

لنفرض أن الجسم يقذف من النقطة ا بسرعة ع فى الاتجاه ا س الذى يصنع زاوية هـ مع الخط الأفقى ا ب فبدون الرجوع الى أى خصية من خواص القطع المكافئ يمكن ايجاد الارتفاع ا م الذى يبلغه الجسم والزمن الذى يستغرقه فى الهواء أى الزمن الذى يستغرقه فى الذهاب من ا الى ب والمسافة ا ب المعروفة بالمجال .



يمكن تحليل سرعة القذف ع الى المركبة الأفقية ع جتا هـ والمركبة الراسية ع جا هـ .

فمن حيث ان القوة التى تؤثر وحدها فى الجسم هى قوة التثاقل فى اتجاه رأسى الى أسفل فالجسم لا تتغير سرعته الأفقية أثناء تحركه .

نتأمل فى الحركة الرأسية بدون مراعاة الحركة الأفقية . فنرى أنه عند نقطة القذف تكون السرعة الرأسية هى ع جا هـ وبمقتضى (بند ٧٧) يرتفع الجسم بهذه السرعة مسافة $\frac{ع^{٢} جا^{٢} هـ}{٢ ء}$ فى زمن قدره $\frac{ع جا هـ}{ء}$. فالارتفاع ا م لأعلى نقطة وهى حـ هو $\frac{ع^{٢} جا^{٢} هـ}{٢ ء}$

وزمن الصعود على القوس ا حـ هو $\frac{ع جا هـ}{ء}$.

وكذا يكون زمن السقوط على القوس حـ ب يساوى $\frac{ع جا هـ}{ء}$ فيكون زمن التحرك هو $\frac{٢ ع جا هـ}{ء}$ وفى هذا الزمن يتحرك الجسم بسرعة أفقية ثابتة هى ع جتا هـ

فالمسافة أ ب $= \frac{ع جتا هـ \times ٢ ع جا هـ}{ء} = \frac{٢ ع^٢ جا هـ جتا هـ}{ء}$.

(مثال) أطلقت بندقية اطلاقا أفقيا فوق سطح بحيرة على ارتفاع قدم واحدة فاذا كانت الرصاصة تقع فى الماء على بعد ٢٢٠ قدما فأوجد سرعتها .

نفرض أن ع سرعة القذف . فبينما تقطع الرصاصة قدما واحدة ساقطة بتأثير التثاقل تتحرك مسافة ٢٢٠ قدما بسرعة ع . وزمن هذا السقوط (باعتبار ء = ٣٢) هو $\frac{١}{٤}$ ثانية .

فبالسرعة ع يتحرك الجسم مسافة ٢٢٠ قدما فى $\frac{١}{٤}$ ثانية أى ٨٨٠ قدما فى الثانية فتكون ع = ٨٨٠ قدما فى الثانية .

(تمارين ٢١)

(١) إحدى الكتلتين فى آلة أتود ٥٠٠ جرام والأخرى ٤٦٠ جراما فهبطت الكبرى ٨١٫٨ من السنتيمترات فى ثانيتين ابتداء من حالة السكون . ما قيمة ء الناتجة من ذلك ؟

(٢) إحدى الكتلتين فى آلة أتود ٣٣ باوندا . هبطت من حالة السكون ٥٠ قدما فى ١٠ ثوان فما الكتلة الأخرى ؟ [خذ ء = ٣٢] .

(٣) إحدى الكتلتين فى آلة أتود ١٠٤ جرامات . والأخرى ١١٤ جراما . فاذا أهمل الاحتكاك والقصور الذاتى للخيط والبكرة فما شد الخيط بالداين ؟ وما عجلة الكتلتين ؟ [خذ ء = ٩٨١] .

(٤) علق جسم كتله باوندان من حافة نضد أملس فسحب جسما آخر عليه كتلته ٣ باوندات . فما المسافة المقطوعة فى ربع ثانية ؟ وما السرعة فى نهاية تلك المدة ؟

(٥) علق جسمان كتلتاهما ك ، كَ من خيط مار على بكرة ملساء وكان فى أول الأمر على ارتفاع واحد من سطح الأرض فبعد ٣ ثوان كان أحدهما مرتفعا عن الآخر بمسافة ٧٢ قدما أوجد نسبة ك : كَ .

(٦) مستوٍ مائل طوله وارتفاعه معينان . أوجد عجلة جسم يزلق عليه بتأثير التثاقل . اذا كانت نسبة ارتفاع المستوى المائل الى طوله كنسبة ٣ : ١٠ فما المسافة التى يقطعها جسم يزلق عليه من حالة السكون فى مدة $\frac{1}{2}$ ٢ من الثوانى ؟

(٧) أوجد الزمن الذى يزلق فيه جسم من أعلى مستوٍ مائل الى أسفله . علما بأن طول المستوى ١٠٠ قدم وميله على الأفق ٣٠° .

(٨) وضع جسم كتلته ١٠ باوندات على نضد أملس طوله ٨ أقدام واتصل بخيطين مارين على بكرتين على حافتى النضد فعلق جسم كتلته ٥ باوندات من أحد الخيطين وآخر كتلته ٣ باوندات من الآخر . فاذا أخذت المجموعة تتحرك وكانت الكتلة التى قدرها ١٠ باوندات عند الحافة التى علقت منها الكتلة التى قدرها ٣ باوندات فأوجد العجلة وشد كل من الخيطين والزمن الذى فيه تقطع الكتلة التى قدرها ١٠ باوندات طول النضد .

(٩) زلق جسم على مستوٍ مائل فقطع $\frac{1}{2}$ ٢ من الأقدام فى الثانية الأولى من حركته فما المسافة التى يقطعها فى الثانية الثالثة ؟

(١٠) اذا سقط جسم سقوطا رأسيا من أعلى مستو مائل الى قاعدته فى نصف الزمن اللازم لزلقه عليه من أعلاه الى أسفله . فما ميله على الأفق ؟

(١١) وضع جسم كتلة $\frac{3}{4}$ ٦ من الباوندات على نضد أفقى ووصله خيط بجسم آخر كتلته $\frac{1}{4}$ ١ من الباوندات قد علق رأسيا من حافة النضد فاذا هبط هذا ساحبا الأول فما مقدار القوة التى بها يسحبه ؟ وما مقدار العجلة الناتجة ؟

(١٢) ا أسفل نقطة من القطر الرأسى ب ا فى دائرة مركزها حـ . ٥ ط نقطة ما على الجزء الأسفل من المحيط . والمماس ط هـ يقابل امتداد ب ا فى د . أثبت أن نسبة الزمن الذى فيه يقطع جسم المسافة ط ا وهو يزلق على الوتر ط ا الى الزمن الذى فيه يقطع الجسم المسافة ط هـ وهو يزلق على المستقيم ط د كنسبة $\sqrt{\text{ا ب}}$: $\sqrt{\text{حـ د}}$

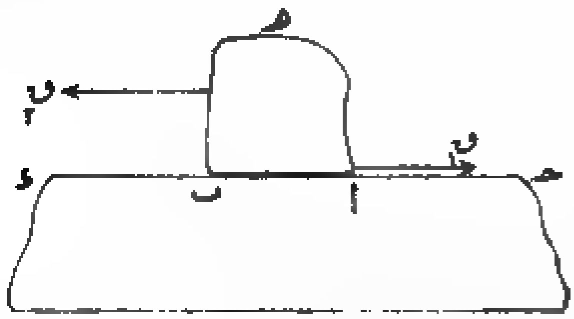
(١٣) قذف جسم قذفا أفقيا بسرعة ٣٢ قدما فى الثانية من نقطة مرتفعة عن سطح الأرض بمقدار ١٢٨ قدما . أوجد سرعته وظل الزاوية التى بين اتجاه حركته والاتجاه الرأسى عند ما يكون ارتفاعه عن الأرض ٦٤ قدما [خذ ء = ٣٢] .

الباب السادس

الاحتكاك

بند ٨١ — تعريف الاحتكاك .

الاحتكاك عبارة عن المقاومة التي تلاقيها عند محاولة إزلاق جسم فوق آخر . والاتجاه الذي فيه تؤثر قوة الاحتكاك أو مقاومته هو اتجاه المماس لسطح التماس . فاذا كان الجسم اب هـ على السطح المستوى حـ ء وحاولنا جره عليه بقوة ق٢ فان الحركة تقاومها قوة الاحتكاك ق١ التي تؤثر على طول السطح حـ ء في الاتجاه المضاد للاتجاه الذي فيه يتحرك الجسم بتأثير القوة ق٢ ويظهر من المشاهدات أن مقدار قوة الاحتكاك بين جسمين يتوقف على نوع السطحين المتماسين . فلسحب حجر على سطح الثلج يحتاج الى قوة أقل مما يُحتاج اليه لسحبه على الأرض . أى أن الاحتكاك بين الحجر والثلج أقل من الاحتكاك بين الحجر والأرض . اذا كان جسم مرتكزا على نضد أفقي فلا احتكاك بينهما لأنه ليس هناك قوة تعمل على سحب الجسم على سطحه . فاذا أثرت قوة في الجسم عاملة على سحبه عليه فان قوة الاحتكاك تأخذ في التأثير عاملة على منعه من التحرك . ويكون حينئذ مقدار قوة الاحتكاك كافيا فقط لمنع التحرك . ولكن اذا زادت القوة التي تعمل على سحب الجسم على النضد زيادة تدريجية نجد أنه عند ما تبلغ حدّاً معينا تتغلب على قوة الاحتكاك ويوشك الجسم أن يتحرك . فنستنتج أن مقدار قوة الاحتكاك بين جسمين له حدّ معين ويبلغ نهايته العظمى عندما يوشك أحد الجسمين أن يزلق على الآخر .



واذا تكلمنا فيما يلى على الاحتكاك بين جسمين فانا نعنى النهاية العظمى لمقداره ويمكن تقليله بين سطحين بالزيت والشحم . وهما يستعملان أيضا في الآلات لتقليل الاحتكاك بين العجلات وحواملها . ويدهن الخشب الذى تزلق عليه السفن الجديدة الى الماء بالشحم .

بند ٨٢ — قد كشف كولوم (Coulomb) (١٧٨١) القانونين الآتيين المتعلقين بالاحتكاك بين سطحين متماسين وأيدهما مورين (Morin) (١٨٣٢) وكان كلاهما ضابطا بالجيش الفرنسى .

(١) يتوقف الاحتكاك على نوع السطحين المتماسين لا على مساحتيهما مادام الضغط بينهما واحدا .

(٢) يتناسب الاحتكاك بين سطحين معينين مع الضغط بينهما .

وهذان القانونان المتعلقان بالاحتكاك بين سطحين يوشك أن يزلق أحدهما على الآخر يسريان على السطحين اللذين يزلق أحدهما على الآخر بالفعل كما أثبت ذلك مورين ويسمى الاحتكاك بين سطحين يزلق أحدهما على الآخر باحتكاك الحركة . ويسمى الاحتكاك بين سطحين متماسين لا يزلق أحدهما على الآخر باحتكاك الثبات .

وقد وجد مورين أن احتكاك الحركة بين سطحين أقل من احتكاك الثبات وأنه لا يتوقف على السرعة التى بها يزلق أحدهما على الآخر .

بند ٨٣ — معامل الاحتكاك .

رأينا أن قوة الاحتكاك بين سطحين تتناسب مع الضغط بينهما فالكسر الناتج من قسمة الاحتكاك على الضغط ثابت دائما اذا لم يتغير نوعا السطحين ويسمى هذا الكسر بمعامل الاحتكاك .

فاذا رمزنا بالرمز ر الى الضغط بين السطحين وبالرمز ق الى الاحتكاك وبالرمز ك الى معامل الاحتكاك يكون .

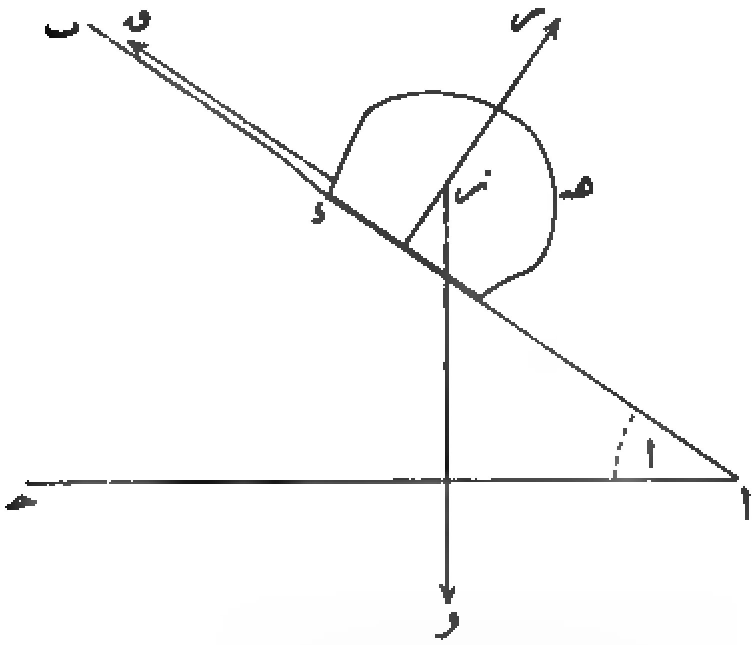
$$ك = \frac{ق}{ر}$$

$$\text{ومنه} \quad ق = ك ر$$

فلو عرفنا مقدار الضغط بين السطحين ومعامل احتكاكهما يمكننا إيجاد الاحتكاك بينهما .

بند ٨٤ — طريقة تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين .

يمكن إيجاد معامل الاحتكاك بين سطحين عمليا . ولذلك جهاز يمثل مقطعه الشكل . ا ب مقطع مستو يتحرك حول مفصل فى ا . ويصنع من إحدى المادتين المحتكتين ، ا حـ هو المستقيم الأفقى فى مستوى المقطع . ، ء هـ ر جسم من مادة أخرى مرتكز بسطح مستو على المستوى ا ب . فيُرفع المستوى الذى مقطعه ا ب على التدريج من الوضع الأفقى حتى يصير الجسم ء هـ ر فى وضع يكاد فيه يزلق منحدرا على المستوى المائل . ففى هذا الوضع يبلغ الاحتكاك بين الجسمين نهايته العظمى .



نفرض أن الشكل ممثل هذا الوضع وأن ا الزاوية التى يصنعها ا ب مع الخط الأفقى ا حـ فالجسم ء هـ ر فى حالة التوازن . فيكون كل من المجموع الجبرى لمركبات القوى المؤثرة فى الجسم ء هـ ر فى اتجاه المستوى والمجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه عمودى عليه يساوى صفرا .

ونفرض أن ر رد فعل المستوى أى القوة التى بها يضغط المستوى الجسم ء هـ ر .

ونفرض أيضا أن ق الاحتكاك المؤثر على طول ا ب الذى يعمل على منع انحدار الجسم على المستوى .

وأن و ثقل الجسم ء هـ ر .

فيكون مجموع المركبات فى اتجاه المستوى = و جا ا — ق وهذا يساوى صفرا

إذن ق = و جا ا ... ... (١)

ومجموع المركبات فى الاتجاه العمودى على المستوى هو ر — و جتا ا وهذا يساوى صفرا .

إذن ر = و جتا ا .... (٢)

وبقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٢) يحدث أن

$$\frac{ق}{ر} = \frac{و\ جا\ ا}{و\ جتا\ ا}$$

$$= ظا\ ا$$

ولما كان خارج قسمة ق على ر يساوى معامل الاحتكاك ك ينتج أن

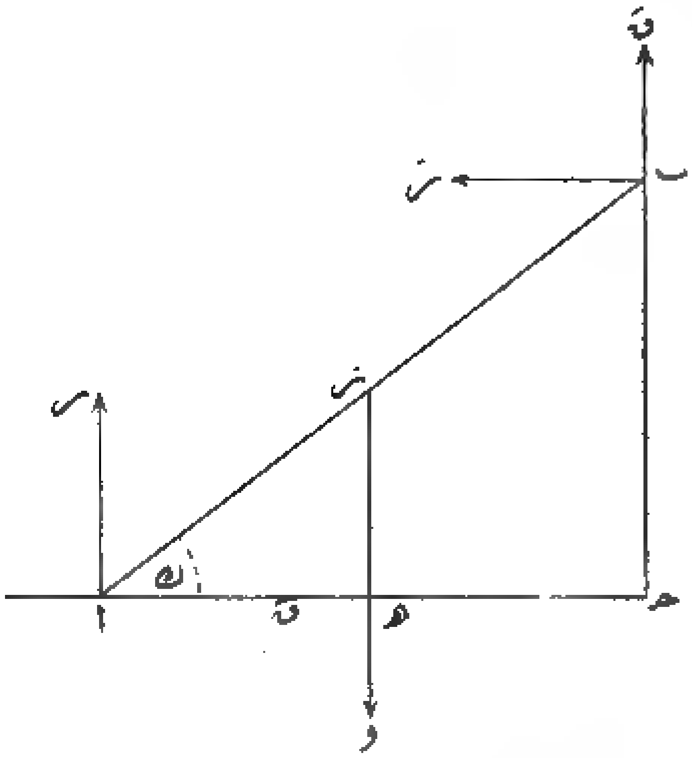
$$ك = ظا\ ا$$

ويمكن تعيين الزاوية ا بالقياس واستخراج ظلها من جدول الظلال . فيمكن تعيين ك وهى أقل من الواحد فى معظم الأحوال .

وتسمى الزاوية ا وهى أكبر ميل للستوى ا ب يكون فيه الجسم متوازنا بزاوية الاحتكاك .

بند ٨٥ — أمثلة على مسائل الاحتكاك .

(مثال ١) وضع سلم على الأرض وأسند الى حائط . فاذا كان معامل الاحتكاك بين السلم وكل من الأرض والحائط يساوى $\frac{1}{3}$ فما أصغر ميل للسلم على الأفق يسكن فيه ؟ بفرض أنه فى مستوٍ رأسى عمودى على الحائط .



لنفرض أن الشكل يمثل وضع السلم ا ب عند مايوشك أن يزلق . هناك خمس قوى تؤثر فى السلم .

(١) الثقل و الذى يمكن اعتباره مؤثرا فى ن منتصف السلم .

(٢) ردّ فعل الأرض ر فى الطرف ا من السلم الذى يرتكز على الأرض . وتؤثر هذه القوة فى اتجاه عمودى عليها .

(٣) الاحتكاك ف على طول الأرض ا حـ الذى يعمل على منع الطرف ا من التحـــرك .

(٤) ردّ فعل الحائط رَ فى الطرف ب من السلم الذى يستند الى الحائط . وتؤثر هذه القوّة فى اتجاه عمودى عليه أى فى اتجاه أفقى .

(٥) الاحتكاك فَ الذى يؤثر الى أعلى فى ب ويعمل على منع الطرف ب من أن يزلق الى أسفل .

وهذه القوى الخمس فى حالة التوازن . فيجب أن يجتمع شرطا بند ٦٤ (١) كل من المجموع الجبرى للركبات الرأسية والأفقية يجب أن يكون صفرا (٢) المجموع الجبرى لعزوم القوى الخمس بالنسبة لنقطة ما فى المستوى يجب أن يكون صفرا .

فبالتحليل رأسيا يحدث أن

ر + فَ = و

وبالتحليل أفقيا يحدث أن

ف = رَ

ومن حيث إن السلم يوشك أن يزلق يبلغ الاحتكاك نهايته العظمى . فتستخرج قيمة الاحتكاك فى ا ، ب بضرب الضغط فى معامل الاحتكاك

اذن ف = ١/٣ ر ، فَ = ١/٣ رَ

وبالتعويض فى المعادلات السابقة يحدث أن

ر + ١/٣ رَ = و

١/٣ ر = رَ

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن

ر = ٩/١٠ و ، رَ = ٣/١٠ و

ويجعل المجموع الجبرى للعزوم بالنسبة للنقطة ا مساويا صفرا يحدث أن

رَ × ب حـ + فَ × ا حـ = و × ا هـ

، رَ × ب حـ + ١/٣ رَ × ا حـ = و × ا هـ (لان فَ = ١/٣ رَ)

ق١ ٣/١٠ و × ب حـ + ١/٣ × ٣/١٠ و × احـ = و × اهـ (لأن رَ = ٣/١٠ و)

ق١ ٣ ب حـ + احـ = ١٠ اهـ (بالقسمة على و/١٠)

ق١ ٣ اب جا ك + اب جتا ك = ١٠ × ١/٢ اب جتا ك

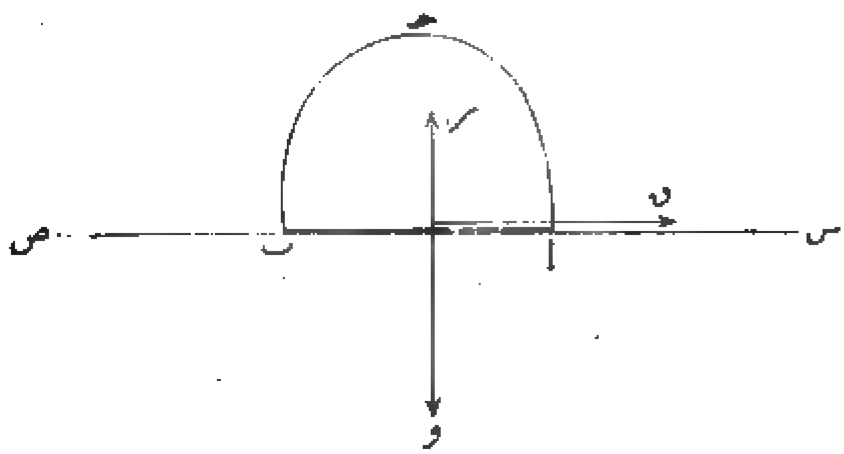
ق١ ٣ جا ك = ٤ جتا ك (بالقسمة على اب)

ومنــه ظا ك = ٤/٣ = ظا ٨َ ٥٣°

فأقل ميل على الأفق يكون فيه السلم ساكنا هو ٨َ ٥٣°

(مثـال ٢) قُذف جسم على مستو أفقى بسرعة ٢٠ قدما فى الثانية . فاذا كان معامل احتكاك الحركة بينهما هو ٢/٥ فما الزمن الذى بعده يسكن الجسم ؟ وما المسافة التى يقطعها فيه ؟

نفرض أن الجسم اب حـ قذف من النقطـة س فى الاتجاه س ص ففى أى لحظة من زمن التحرك تكون القوى التى تؤثر فى الجسم هى :



(١) الثقل و الذى يتجه رأسيا الى أسفل .

(٢) ردّ فعل المستوى ر رأسيا الى أعلى .

(٣) الاحتكاك ن فى الاتجاه ص س . ويعمل على تقصير حركة الجسم .

فاذا كانت ك كتلة الجسم فثقله بالوحدات المطلقة ك ء .

ومن الواضح أن الثقل يسـاوى ردّ الفعل ر . فردّ الفعل بالوحدات المطلقة هو ك ء . والاحتكاك ر مضروبا فى معامل الاحتكاك يساوى ٢/٥ ك ء . وهذه القوة

وحدها هى التى تعمل على تقصير حركة الجسم . ومن حيث إن الكتلة هى ك يكون التقصير هو :

$$\frac{\frac{٢}{٥} ك ء}{ك} \quad \text{أو} \quad \frac{٢}{٥} ء$$

فنرى فى ذلك مثالا لحركة فيها يبدأ الجسم بسرعة ٢٠ قدما فى الثانية وله عجلة سالبة مقدارها $\frac{٢}{٥}$ ء فى الثانية .

فاذا رمزنا إلى الزمن بالرمز د وإلى المسافة المطلوبة بالرمز ف نرى من الحالة الخاصة المذكورة فى بند ٢٧ أن :

$$٢٠^٢ - ٢ \times \frac{٢}{٥} ء ف = \text{صفرا} .$$

$$٢٠ - \frac{٢}{٥} ء د = \text{صفرا} .$$

وبجعل ء = ٣٢,٢ ينتج أن .

$$ف = \frac{٥٠٠}{٣٢,٢} = ١٥,٥٣ \text{ من الأقدام تقريبا} .$$

$$د = \frac{٥٠}{٣٢,٢} = ١,٥٥٣ \text{ من الثوانى تقريبا} .$$

(تمارين ٢٢)

(١) ارتكز أحد طرفى سلم على الأرض والآخر على حائط رأسى بحيث يميل السلم على الخط الرأسى بزاوية ٣٠° . وصعد رجل فيه فكاد السلم يقع عند ما وصل مركز ثقل الرجل إلى منتصف السلم .

أولا — اذا كان الحائط تام الملاسة بحيث لا يكون بينه و بين السلم احتكاك ما فأوجد معامل الاحتكاك بين السلم والأرض .

ثانيا — اذا كان الحائط والأرض متساويى الخشونة فأوجد معامل الاحتكاك .

(٢) كان قطار سائرا بسرعة ٤٥ ميلا فى الساعة ثم حبس البخار فوقف فى ٣ دقائق بتأثير الاحتكاك بين العجلات والقضبان . أوجد معامل الاحتكاك .

(٣) قذف جسم على مستوٍ أفقى خشن بسرعة ٣٠ مترا فى الثانية وكان معامل الاحتكاك بينهما $\frac{1}{4}$ فما الزمن الذى بعده يسكن الجسم ؟ وما المسافة التى يقطعها فيه ؟ [اجعل ء = ٩٨١] .

(٤) أثبت أن عجلة جسم يزلق على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية هـ تساوى :

ء جا هـ — ك ء جتا هـ

علما بأن ء عجلة التثاقل ، ك معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

(٥) أزلقت قطعة خشب على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٣٠° . وكان معامل الاحتكاك ٤٥ر. فما الزمن الذى تقطع فيه ١٢ ياردة ابتداء من حالة السكون ؟ وما سرعتها فى نهايته . [اجعل ء = ٣٢] ؟

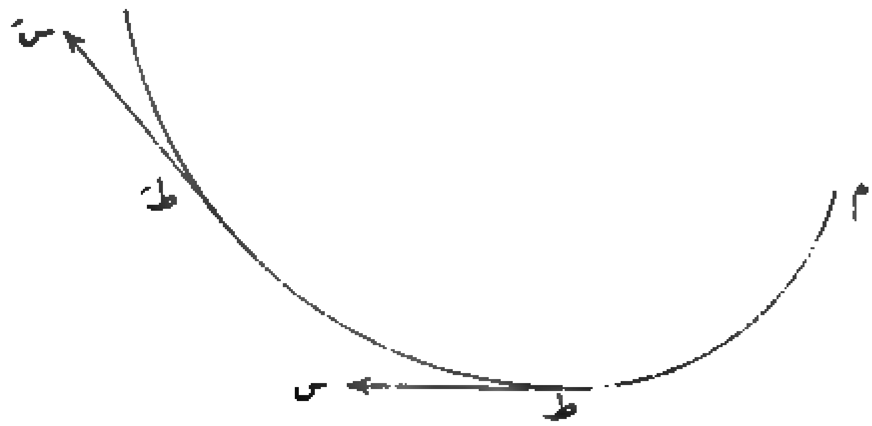
الباب السابع

الهودجراف — الحركة الدائرية المنتظمة

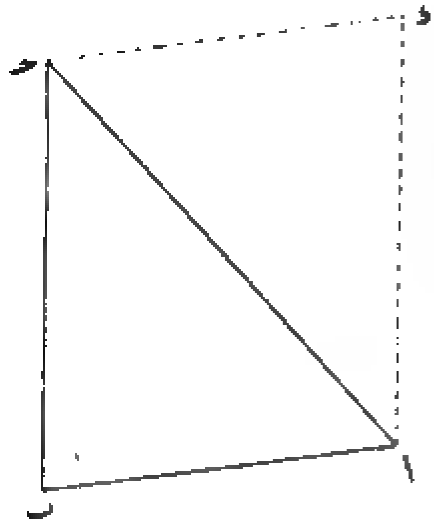
بند ٨٦ — التغير فى السرعة .

بينا فى الباب الثانى معنى التغير فى سرعة الجسم الذى يتحرك فى خط مستقيم . ونشرع الآن فى بيان معنى التغير فى سرعة الجسم الذى يتحرك فى منحن .

إذا تحرك جسم فى المنحنى م ط طَ كان اتجاها الحركة فى النقطتين ط ، طَ المماسين ط س ، طَ سَ .

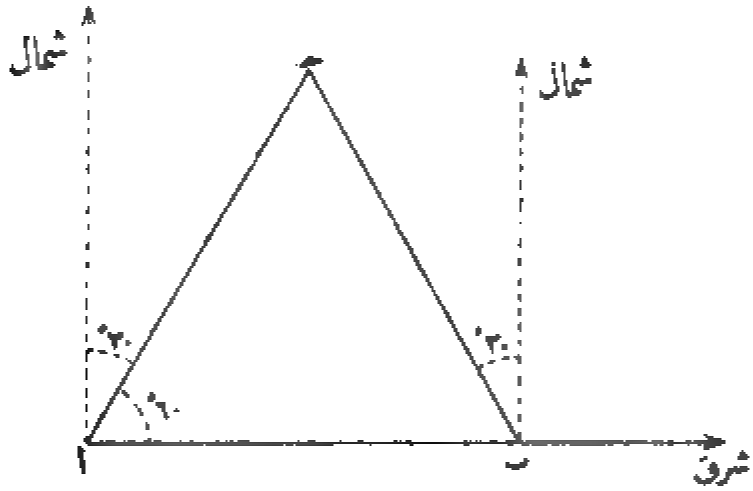


نرسم المستقيمين ا ب ، ا حـ من نقطة مثل ا بحيث يمثلان فى المقدار والاتجاه سرعتى النقطتين ط ، طَ . فالتغير فى السرعة بين النقطتين ط ، طَ يمثله ب حـ فى المقدار والاتجاه .



أكمل متوازى الأضلاع ب ء . فيمكن تمثيل التغير فى السرعة بالمستقيم ا ء لأنه يساوى ب حـ ويوازيه . ولما كانت ا ء السرعة التى يلزم تركيبها مع السرعة ا ب للحصول على السرعة ا حـ نستنتج أن التغير فى السرعة بين النقطتين ط ، طَ عبارة عن السرعة التى يجب تركيبها مع السرعة فى ط لتحدث السرعة فى طَ .

(مثال) جسم يتحرك فى لحظة معينة بسرعة ٤ أقدام فى الثانية شرقا وفى لحظة تالية بسرعة ٤ أقدام شرق الشمال بمقدار ٣٠° فما تغير السرعة فى المقدار والاتجاه ؟



نفرض أن ا ب ممثل للسرعة شرقا ، ا حـ ممثل للسرعة شرق الشمال بمقدار ٣٠° فالتغير يمثله ب حـ . ومن الواضح أن الزاوية ب ا حـ = ٦٠° ، ا ب = ا حـ فيكون ا ب حـ مثلثا متساوى الأضلاع . وحينئذ ب حـ = ا ب والزاوية حـ ب ا = ٦٠° فالزاوية التى يصنعها ب حـ مع الاتجاه الشمالى = ٣٠°

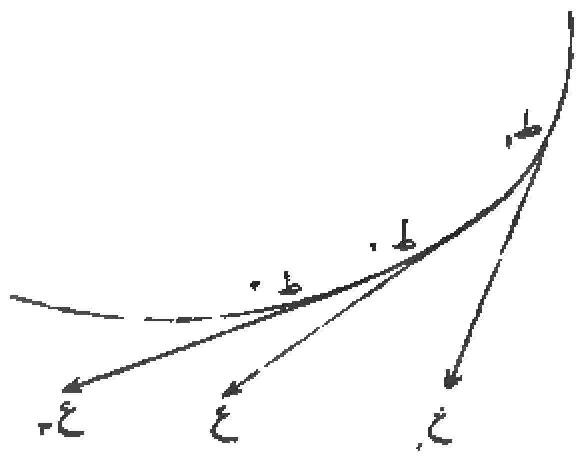
فيكون التغير فى السرعة ٤ أقدام فى الثانية غرب الشمال بمقدار ٣٠°

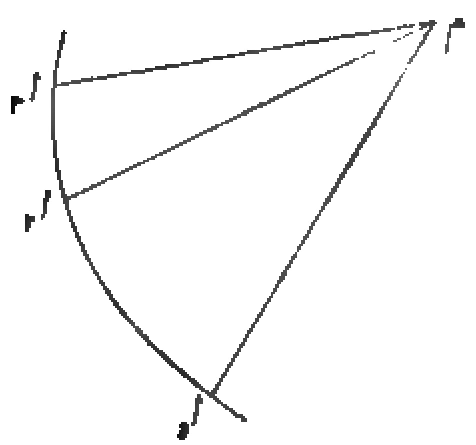
بند ٨٧ — تعريف عام للعجلة .

اذا اعتبرنا المعنى المتوسع فيه للتغير فى السرعة الذى شرحناه فى البند السابق فاننا نعرف العجلة بأنها معدل التغير فى السرعة .

بند ٨٨ — الهودجراف .

اذا تحرك جسم بطريقة ما فى مستقيم او منحن ثم رسمت من نقطة ما مستقيمات تمثل فى المقدار والاتجاه سرعته فى جميع نقط المنحنى فاننهايات تلك المستقيمات تكون منحنيا يسمى بهودجراف الجسم المتحرك .





نفرض أن جسما يتحرك فى المنحنى $ط_{١}$ $ط_{٢}$ $ط_{٣}$ ... ... وأن السرع فى النقط $ط_{١}$ ، $ط_{٢}$ ، $ط_{٣}$ ، ... ... هى $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، ... ... ثم نرسم من نقطة مثل م مستقيمات تمثل فى المقدار والاتجاه السرع $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، ... . ولتكن $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$ ، ... ... نهايات تلك المستقيمات . فمن الواضح أنه اذا أخذت النقط $ط_{١}$ ، $ط_{٢}$ ، $ط_{٣}$ ، ... ... على المنحنى $ط_{١}$ $ط_{٢}$ $ط_{٣}$ ... ... وبعضها قريب جدا من بعض قربت المستقيمات م $ا_{١}$ ، م $ا_{٢}$ ، م $ا_{٣}$ ، ... ... بعضها من بعض قربا عظيما وتقع النقط $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$ ، ... ... على منحنٍ هو هودجراف الجسم المتحرك فى المنحنى $ط_{١}$ $ط_{٢}$ $ط_{٣}$ ... ...

لكل نقطة على المنحنى نظير على الهودجراف . ولذا يمكننا أن نتصور أنه بينما يرسم الجسم المنحنى يرسم جسم آخر الهودجراف .

وللهودجراف خصيتان نذكرهما بدون برهان .

(١) سرعة الجسم التصورى الذى يرسم الهودجراف فى نقطة ما عليه تساوى عجلة الجسم الذى يرسم المنحنى فى النقطة التى تناظرها عليه .

(٢) اتجاه سرعة الجسم التصورى الذى يرسم الهودجراف فى نقطة ما عليه هو عين اتجاه عجلة الجسم الذى يرسم المنحنى فى النقطة التى تناظرها عليه .

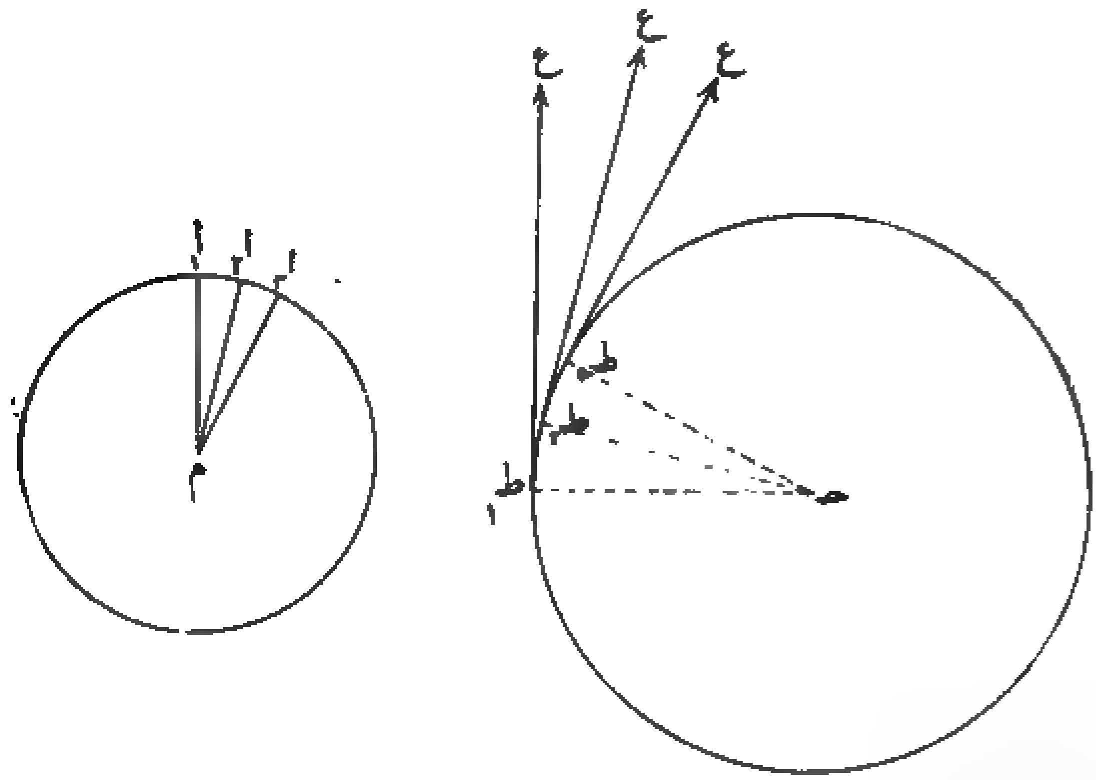
بند ٨٩ — الحركة المنتظمة فى دائرة .

نفرض أن $ط_{١}$ $ط_{٢}$ $ط_{٣}$ ... . دائرة رسمها جسم متحرك بسرعة منتظمة(*) هى ع . فاذا رسم من نقطة مثل م المستقيمات م $ا_{١}$ ، م $ا_{٢}$ ، م $ا_{٣}$ ، ... . ممثلة فى المقدار والاتجاه السرع فى النقط $ط_{١}$ ، $ط_{٢}$ ، $ط_{٣}$ ، ... .

فمن الواضح أن هذه المستقيمات كلها متساوية . فتقع جميع النقط $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$ ، ... . على محيط دائرة . فيكون هودجراف الجسم الذى يتحرك فى دائرة بسرعة منتظمة هو دائرة .

(*) أى منتظمة فى المقدار

ومن حيث ان الدائرة ط$_1$ ط$_2$ ط$_3$ ... ... رسمت بسرعة منتظمة تتساوى الأقواس ط$_1$ ط$_2$ ، ط$_2$ ط$_3$ ، ... ... المرسومة فى أزمنة متساوية . فتتساوى



زواياها المركزية ط$_1$ حـ ط$_2$ ، ط$_2$ حـ ط$_3$ ، ... ... ولكن الزاوية ط$_1$ حـ ط$_2$ تساوى الزاوية التى بين المماسين فى ط$_1$ ، ط$_2$. والزاوية ط$_2$ حـ ط$_3$ تساوى الزاوية التى بين المماسين فى ط$_2$ ، ط$_3$ وهكذا . ومن حيث ان المستقيمات م ا$_1$ ، م ا$_2$ ، م ا$_3$ ، ... ... توازى المماسات فى ط$_1$ ، ط$_2$ ، ط$_3$ ، ... ... على التناظر ينتج تساوى الزوايا ا$_1$ م ا$_2$ ، ا$_2$ م ا$_3$ ، ... ... المرسومة فى أزمنة متساوية . فتتساوى أيضا الأقواس ا$_1$ ا$_2$ ، ا$_2$ ا$_3$ ، ... ... المرسومة فى أزمنة متساوية . أى أن الهودجراف قد رسم بسرعة منتظمة . ويتضح أيضا أن الدورة الواحدة فى الهودجراف تتم فى نفس الزمن الذى فيه تتم دورة واحدة فى المنحنى .

ومن حيث إن الهودجراف دائرة يكون اتجاه سرعة أى نقطة فيه مثل ا$_1$ واقعا على المماس للدائرة فى ا$_1$. أى يكون الاتجاه عموديا على نصف القطر م ا$_1$. ولما كان م ا$_1$ موازيا المماس فى ط$_1$ أى عموديا على نصف القطر حـ ط$_1$ ينتج أن اتجاه سرعة نقطة ما فى الهودجراف عين اتجاه نصف القطر المار بالنقطة التى تناظرها فى المنحنى .

بند ٩٠ — عجلة الجسم الذى يتحرك بسرعة منتظمة فى دائرة .

لتكن ع التى بالشكل السابق ممثلة سرعة جسم يرسم الدائرة $ط_١ ط_٢ ط_٣$ ... . بسرعة منتظمة وليكن ى رمزا لنصف قطرها .

رأينا فى البند السابق أن الهودجراف هو دائرة نصف قطرها ع وانها ترسم بانتظام فى نفس الزمن الذى ترسم فيه الدائرة الأصلية .

نرمز بالرمز غ الى السرعة التى بها يرسم الهودجراف .

فمن حيث ان محيط الدائرة الأصلية ٢ ط ى ومحيط الهودجراف ٢ ط ع نرى أن المسافة ٢ ط ى تقطع بسرعة منتظمة هى ع فى نفس الزمن الذى فيه تقطع المسافة ٢ ط ع بالسرعة غ وينتج من بند ١٣ أن .

$$\frac{غ}{٢ ط ع} = \frac{ع}{٢ ط ى}$$

ومنه $$غ = \frac{ع^٢}{ى}$$

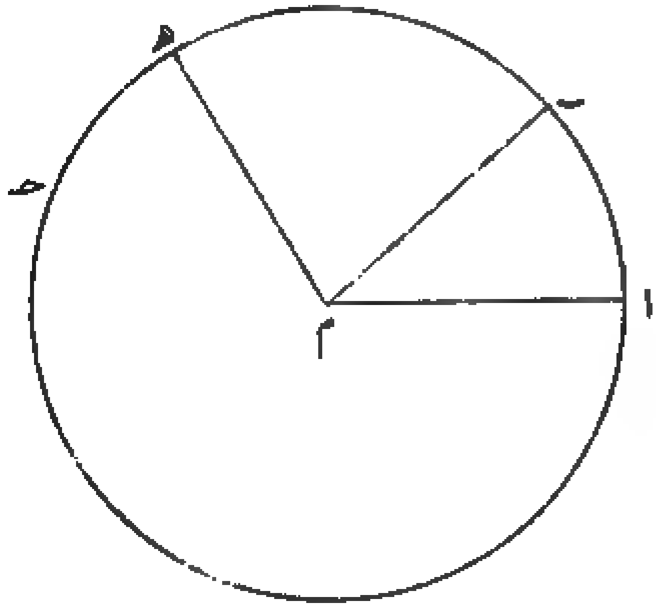
والسرعة فى الهودجراف تساوى العجلة فى المنحنى واتجاه السرعة فى الهودجراف هو عين اتجاه العجلة فى المنحنى . فما تقدم نستنتج أن النقطة التى تتحرك فى دائرة بالسرعة المنتظمة ع لها على الدوام عجلة مقدارها $\frac{ع^٢}{ى}$ تتجه نحو مركز الدائرة .

وربما يظهر للطالب بادئ بدء أنه من التناقض أن يكون لجسم عجلة وهو يتحرك بسرعة منتظمة . ولكن يجب أن نتذكر أن لفظ عجلة مستعمل بمعناه العام وهو معدل التغير فى السرعة . سواء كان ذلك فى اتجاه الحركة أو فى غيره . فاذا تحرك جسم فى دائرة بسرعة منتظمة فان السرعة لا تكون متغيرة فى المقدار ولكنها تتغير على الدوام فى الاتجاه . ويقدر معدل ذلك التغير بالمقدار $\frac{ع^٢}{ى}$.

بند ٩١ — السرعة الزاوية لجسم يرسم دائرة بسرعة منتظمة .

اذا رسم جسم دائرة أثناء تحركه فان مقدار دوران نصف القطر الواصل بين الجسم والمركز فى وحدة الزمن يسمى بالسرعة الزاوية للجسم حول المركز .

فاذا كانت سرعة الجسم منتظمة فالسرعة الزاوية منتظمة وتقدّر بعدد الزوايا النصف القطرية التى يصنعها نصف القطر فى دورانه أثناء وحدة الزمن . فلو اعتبرنا الثانية وحدة للزمن وفرضنا أن القوس ا ب هو الذى يرسمه الجسم فى ثانية يكون عدد الزوايا النصف القطرية فى الزاوية ا م ب عبارة عن السرعة الزاوية للجسم .



نرمز الى السرعة الطولية بالرمز ع والى السرعة الزاوية بالرمز ے والى نصف القطر بالرمز ن فمن حساب المثلثات ينتج أن .

القوس ا ب = الزاوية ا م ب × نصف القطر .

فيكون ع = ے ن ... ... (١)

واذا رسم القوس ا هـ فى د من الثوانى يكون طوله مساويا طول القوس ا ب د من المرات وتكون الزاوية ا م هـ مساوية الزاوية ا م ب د من المرات . أى أن الزاوية التى يصنعها نصف القطر الدائر تساوى

ے د .

فاذا رمزنا بالرمز ز الى الزمن الذى يستغرقه الجسم فى رسم الدائرة فان نصف القطر يصنع زاوية قدرها ٢ ط أثناء دورانه ز من الثوانى . فيصنع فى الثانية الواحدة زاوية قدرها ٢ط/ز . فنستنتج أن .

ے = ٢ط/ز ... ... (٢)

ومن القانونين (١) ، (٢) يحدث أن .

ے = ع/ن = ٢ط/ز .

(مثـال) تتحرك نقطة على محيط دائرة نصف قطرها نق من الأقدام بسرعة زاوية قدرها ى من الزوايا النصف القطرية فى الثانية . فما الزمن الذى تستغرقه فى قطع مسافة ف من الأقدام من مسارها ؟

من القانون (١) نرى أن السرعة هى ى نق من الأقدام فى الثانية فتستغرق $\frac{ف}{ى\,نق}$ من الثوانى فى قطع مسافة ف من الأقدام .

بند ٩٢ — يمكن ايجـاد عجلة الجسم الذى يرسم دائرة رسما منتظما بدلالة السرعة الزاوية ى وكذا بدلالة ز التى هى مدة الدورة .

من حيث إن ع = ى نق تكون العجلة هى

$$\frac{ع^{٢}}{نق} = \frac{ى^{٢}\,نق^{٢}}{نق} = ى^{٢}\,نق \qquad (١)$$

واذا كانت ز مدة الدورة تكون $ى = \frac{٢ط}{ز}$ فالعجلة بدلالة ز هى

$$\left(\frac{٢ط}{ز}\right)^{٢} نق \qquad (٢)$$

بند ٩٣ — القوة المركزية الطاردة .

رأينا أن الجسم الذى يرسم دائرة رسمـا منتظما له عجلة تتجه نحو المركز . وينتج من القانون الثانى فى الحركة لنيوتن أن الجسم الذى يتحرك فى دائرة تؤثر فيه على الدوام قوة متجهة نحو المركز . وتقدر هذه القوة بالوحدات المطلقة بضرب كتلة الجسم فى العجلة . والعجلة يمكن أن يعبر عنها بالصور الثلاث الآتية :

$$\frac{ع^{٢}}{نق} \text{ ، } ى^{٢}\,نق \text{ ، } \left(\frac{٢ط}{ز}\right)^{٢} نق$$

واذا رمز بالرمز ك الى كتلة الجسم يمكن أن يعبر عن القوة بالصور الثلاث الآتية :

$$\frac{ك\,ع^{٢}}{نق} \text{ ، } ك\,ى^{٢}\,نق \text{ ، } ك\left(\frac{٢ط}{ز}\right)^{٢} نق$$

فنصل الى النتيجة الآتية وهى :

اذا أريد أن يبقى الجسم متحركا فى دائرة يجب أن تؤثر فيه على الدوام قوة تتجه نحو المركز .

وقد ذكرنا ثلاثة قوانين متكافئة لتقدير تلك القوة بالوحدات المطلقة . وليس لهذه القوة تأثير فى السرعة الحقيقية للجسم . وانما تأثيرها فى أن تحوّل اتجاهه من المماس الذى يتحرك فيه فى لحظة ما . واذا بطل هذا التأثير فى نقطة ما سار الجسم على المماس للدائرة فى تلك النقطة .

وقد كان المعروف قبل زمن نيوتن أنه لابد من قوة تجعل الجسم يتحرك فى دائرة . وكان يُظن أنها لازمة حتى توازن قوة أخرى تعمل على طرد الجسم من المركز ولذا سميت هذه بالقوة المركزية الطاردة . ولكننا نعرف الآن أن هذه القوة الطاردة ليست إلا ميل الجسم الى التحرك فى خط مستقيم لقصوره الذاتى .

وأمثلة القوة المركزية الطاردة كثيرة فمنها القوة التى فى قطار يدور فى منحن. ويوازنها ضغط القضيب الحديدى من الخارج لعجلات القاطرة والعربات .

وبمقتضى هذه القوة أيضا تنفرج كرتا مُنَظِّم (وات) فى الآلة البخارية أثناء دورانه بسرعة . وفلطحة الكرة الأرضية ناشئة من تأثيرها أيضا وهى تبرد فى الأزمنة البعيدة متحوّلة من السيلان الى الصلابة .

(مثال ١) عربة صغيرة كتلتها $\frac{١}{٢}$ باوند تجرى بسرعة ٥ أميال فى الساعة على قضيب حديدى دائرى فى مستوٍ أفقى نصف قطره ٣ أقدام . ما الضغط الأفقى على القضيبين الحديديين ؟

الضغط الأفقى على القضيبين الحديدين يساوى القوة المركزية الطاردة وهى تساوى

$$\frac{ك ع^{٢}}{س}$$

وباستعمال الوحدات الانجليزية نرى أن

$$ك = \frac{١}{٢} ، س = ٣ ، ع = \frac{٥ \times ١٧٦٠ \times ٣}{٦٠ \times ٦٠} = \frac{٢٢}{٣}$$

فالضغط الافقى على الخطين الحديديين هو

$$\frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{٢٢}{٣}\right)^{٢}}{٣} = ٨٫٩٦٣ \text{ من الباوندالات}$$

وبجعل ء = ٣٢ تصير هذه القوة مساوية ٠٫٢٨ من ثقل الباوند .

(مثال ٢) أدير حجر كتلته باوندان فى دائرة أفقية ثلاث مرات فى الثانية بخيط طوله ٣ أقدام . فما الشدّ فيه ؟

الشدّ فى الخيط يساوى القوة المركزية الطاردة . ولكوننا نعرف مدة الدورة ز نستعمل القانون ك × $\left(\frac{٢ط}{ز}\right)^٢$ لايجاد القوة المركزية الطاردة

وباستعمال الوحدات الانجليزية نرى أن

$$ك = ٢ \quad ، \quad ق = ٣ \quad ، \quad ز = \frac{١}{٣}$$

فالشــدّ فى الخيط هو

$$٢ \times \frac{٤ ط^٢}{(\frac{١}{٣})^٢} \times ٣$$

$$= ٢١٦٠ \text{ باوندالا} \qquad (\text{باعتبار } ط^٢ = ١٠)$$

$$= ٦٧ \tfrac{١}{٢} \text{ من ثقل الباوند} \quad (\text{باعتبار } ء = ٣٢)$$

(تمارين ٢٣)

(١) يتحرك جسم على محيط دائرة بسرعة زاوية قدرها ٣ زوايا نصف قطرية فى الثانية فاذا كان نصف قطر الدائرة ١٠ أقدام فما السرعة الطولية للجسم ؟

(٢) تحرك جسم على محيط دائرة بسرعة طولية قدرها ٢٠ قدما فى الثانية فقطع ربع المحيط فى ٣ ثوان . ما سرعته الزاوية وما نصف قطر الدائرة ؟

(٣) قاطرة بخارية كتلتها ١٩ طنا سارت فى منحنٍ على شكل قوس دائرة نصف قطرها $\frac{١}{٢}$ ميل بسرعة ٣٥ ميلا فى الساعة . فما القوة المركزية الطاردة ؟

(٤) ربط جسم بطرف خيط قد ثبت طرفه الآخر . وأدير بسرعة منتظمة فى دائرة أفقية والخيط مشدود . ثم ربط بطرف خيط طوله ضعف طول الخيط الأوّل وأدير مرة أخرى . قارن بين شدى الخيطين اذا كان عدد الدورات التى يتمها أحد الخيطين فى الدقيقة يساوى عدد الدورات التى يتمها الآخر فيها .

(٥) ما القوة اللازمة لتحريك جسم كتلة ١٠ باوندات فى دائرة نصف قطرها ١٥ قدما ؟

(أولا) اذا كانت سرعته ٣٠ قدما فى الثانية .

(ثانيا) اذا أتم دورة كاملة فى الثانية .

(٦) ينقطع سلك اذا عُلق منه جسم ثقله ١٠٠ باوند . فاذا رُبط جسم كتلته ١٠ باوندات فى طرف قطعة منه ثم حرّك فى دائرة أفقيـة نصف قطرها ٢٠ قدما فأوجد السرعة النهائية التى يبلغها الجسم قبلما ينقطع السلك .

(٧) رُبط جسم كتلته باوندان فى طرف خيط طوله ٤ أقدام وقد ثبت طرفه الآخر فى إحدى نقط مستو أفقى أملس . فاذا كان الخيط يتحمل شدّا قدره ثقل ٩ باوندات فقط فما أكبر سرعة يتحرك بها الجسم من غير أن ينقطع الخيط ؟

(٨) يتحرك الجسمان ا ، ب على محيطى دائرتين بسرعتين منتظمتين ونصف قطر الدائرة التى يتحرك فيها ا يساوى نصف قطر الدائرة التى يتحرك فيها ب ٣٩٠ مرة ويدور ا دورة كاملة بينما يدور ب ١٣ دورة كاملة . وكتلة ا تساوى كتلة ب ٩١ مرة . قارن بين القوة المؤثرة فى ا والقوة المؤثرة فى ب .

(٩) اذا كان طول نصف قطر الأرض ٤٠٠٠ ميل فالقوة المركزية الطاردة لجسم على خط الاستواء وهى الحادثة من دوران الأرض على محورها مرة واحدة كل ٢٤ ساعة تساوى $\frac{١}{٢٨٩}$ من ثقل ذلك الجسم تقريبا . أثبت هذا .

(١٠) برهن على أن القوة المركزية الطاردة لجسم متحرك على محيط دائرة تتغير تغيرا طرديا بتغير مربع السرعة الزاوية أو تغيرا عكسيا بتغير مربع زمن الدوران .

(١١) استنتج من المسألة المتقدمة النسبة التى بها يجب أن تزيد سرعة دوران الأرض حتى ينعدم الثقل الظاهر لأى جسم على خط الاستواء .

(١٢) ماالقوة (مقدرة بثقل الجرام) اللازمة لتحريك جسم كتلته ٢٠ جراما فى دائرة نصف قطرها ٤ سم بحيث يدور ٣٠ دورة فى ثانية واحدة [ء = ٩٨١]

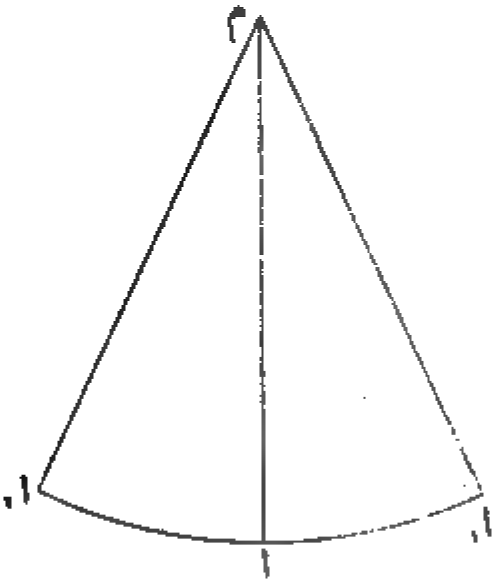
الباب الثامن

البندول البسيط — عزم القصور — البندول المركب

بند ٩٤ — البندول البسيط .

يعرّف البندول البسيط بأنه كتلة لانهائية فى الصغر قد علّقت فى نهاية خيط لاثقل له غير قابل للامتداد .

فالبندول البسيط جهاز تصورى لأن أرفع خيط له ثقل معين . وكل كتلة مهما كان صغرها لها مقدار معين . ولكن لو أخذنا خيطا رفيعا جدّا وعلقنا من نهايته جسما صغيرا جدّا ككرة من الرصاص مثلا لحصلنا على مايقرب قربا عظيما من البندول البسيط التصورى .



ونفرض أن البندول البسيط هو بهذا التركيب . فاذا علّق من نقطة فانه يتزن فى وضع رأسى ولو حوّل الى وضع آخر لتذبذب ذهابا وجيئة حتى يسكن أخيرا فيه .

اذا فرضنا أن م ا وضع اتزان بندول بسيط يتذبذب بين القوسين المتساويين ا ا١ ، ا ا٢ على جانبى الخط الرأسى فان الزاوية ا م ا١ أو الزاوية ا م ا٢ المساوية لها تسمى سعة التذبذب والزمن الذى يستغرقه فى الحركة من ا١ الى ا٢ ، من ا٢ الى ا١ يساوى نصف مدة الذبذبة التامة .

بند ٩٥ — مدة ذبذبة البندول البسيط .

للبندول البسيط خصّية هامة وهى أنه مادامت سعة ذبذبته أقل من ٢° أو ٣° تكون مدتها غير متوقفة على هذه السعة . وانما تتوقف على طوله وعلى قيمة عجلة التثاقل .

فمدة ذبذبة بندول بسيط فى مكان معين واحدة سواء كانت سعتها ٢° أو ١° أو كانت ١٠″ فقط .

ولا نبرهن الآن على قانون مدة الذبذبة [1] للبندول البسيط الذى يتذبذب فى قوس صغير على جانبى الخط الرأسى . وانما نثبته من غير برهان وهو :

$$د = ط \sqrt{\frac{ل}{ء}}$$

علما بأن د مدة نصف الذبذبة التامة بالثوانى ، ط نسبة محيط الدائرة الى قطرها (٣,١٤١٦) ، ل طول البندول ، ء عجلة التثاقل فى مكان البندول .

فاذا استعملت الوحدات الفرنسية وجب أن نعبر عن ل بالسنتيمترات وعن ء بالسنتيمترات والثوانى . واذا استعملت الوحدات الانجليزية وجب أن نعبر عن ل بالأقدام وعن ء بالأقدام والثوانى .

(مثال ١) أوجد مدة ذبذبة بندول بسيط طوله ٤ أقدام فى مكان عجلة التثاقل به هى ٣٢,٢ .

باستعمال القانون نجد أن ل = ٤ ، ء = ٣٢,٢ . فالزمن هو

$$٣,١٤١٦ \sqrt{\frac{٤}{٣٢,٢}} = ١,١٠٧$$ من الثوانى تقريبا .

(مثال ٢) ماعدد ذبذبات بندول بسيط طوله ٩٩,٨ من السنتيمترات فى ٢٤ ساعة اذا علم أن عجلة التثاقل فى مكان البندول ٩٨١,٥٤ بالوحدات الفرنسية .

مدة الذبذبة الواحدة هى

$$٣,١٤١٦ \sqrt{\frac{٩٩,٨}{٩٨١,٥٤}} = ١,٠٠١٧$$ من الثوانى

ومن حيث إن اليوم عبارة عن ٢٤ × ٦٠ × ٦٠ ثانية يكون عدد الذبذبات فى اليوم هو

$$\frac{٢٤ \times ٦٠ \times ٦٠}{١,٠٠١٧} = ٨٦٢٥٣$$

ومن حيث إن فى اليوم ٨٦٤٠٠ ثانية فالساعة التى يكون بندولها هذا تؤخر ٨٦٤٠٠ — ٨٦٢٥٣ أى ١٤٧ ثانية فى اليوم .

(١) اذا تكلمنا فيما بعد على مدة ذبذبة البندول نعنى مدة نصف الذبذبة أى مدة التحرك من أقصى نقطة على اليمين الى أقصى نقطة على اليسار .

بند ٩٦ — بندول الثواني .

بندول الثواني في مكان معين هو بندول ذو طول يتمكن به من دق ثوان في ذلك المكان .

ولايجاد طول بندول الثواني نجعل د = ١ في قانون البند السابق فاذا رمزنا بالرمز ل الى بندول الثواني يكون

$$١ = ط \sqrt{\frac{ل}{ى}}$$

ومنه $$ل = \frac{ى}{ط^٢}$$

(مثال ١) ماطول بندول الثواني في جرينش حيث تكون عجلة التثاقل ٣٢٫١٩١٢ بالوحدات الانجليزية ؟

$$الطول = \frac{٣٢٫١٩١٢}{(٣٫١٤١٦)^٢} \text{ من الأقدام } = ٣٩٫١٣٩ \text{ من البوصات}$$

(مثال ٢) طُوِّل بندول ثوان فكانت الزيادة في مدة الذبذبة $\frac{١}{٨٠}$ من الثانية . فما الزيادة في طوله ؟

ليكن ل الطول الأصلي ، لَ الطول الزائد فمن حيث إن مدة الذبذبة بالطول الأصلي ثانية تكون مدة الذبذبة بالطول الزائد $\frac{٨١}{٨٠}$ من الثواني

اذن $$١ = ط \sqrt{\frac{ل}{ى}} \quad ، \quad \frac{٨١}{٨٠} = ط \sqrt{\frac{لَ}{ى}}$$

ومنه $$ل = \frac{ى}{ط^٢} \quad ، \quad لَ = \frac{ى}{ط^٢} \left(\frac{٨١}{٨٠}\right)^٢$$

وبالقسمة ينتج $$\frac{لَ}{ل} = \left(\frac{٨١}{٨٠}\right)^٢$$

فيكون $$\frac{لَ - ل}{ل} = \frac{٨١^٢ - ٨٠^٢}{٨٠^٢}$$

$$= \frac{١٦١}{٦٤٠٠}$$

فيكون $$لَ - ل = \frac{١٦١}{٦٤٠٠} ل$$

أى أن الزيادة في الطول = $\frac{١٦١}{٦٤٠٠}$ من الطول الأصلي .

بند ٩٧ — تعيين عجلة التثاقل بالبندول .

من قانون (بند ٩٥) نحصل على القيمة الآتية لمقدار ى

$$ى = \frac{ط^٢ ل}{د^٢}$$

ومنه نعرف قيمة عجلة التثاقل فى أى مكان بدلالة طول البندول البسيط ل ومدة النبذبة د فى ذلك المكان . وقد أجريت تجارب بالبندول فى أماكن كثيرة على سطح الأرض وعينت مقادير ى استنتاجا من تلك التجارب بالقانون السابق . ومن حيث إن البندول المستعمل أيا كان ليس إلا تقريبا للبندول التصورى البسيط تكون مقادير ى المستنتجة من التجارب غير تامة الضبط .

والنتيجة العامة لتجارب البندول البسيط هى أن قيمة ى تكون فى نهايتها الصغرى عند خط الاستواء وتزيد كلما بعدنا عنه متجهين نحو أحد القطبين . وهذا التغير ناشئ من السببين الآتيين : (أولا) إن الأرض كرة مفلطحة القطبين فبُعْدُ أى جسم عن مركزها وهو فى خط الاستواء أكبر منه فى أى خط عرض آخر . ويكون الجسم أقرب الى مركز الأرض كلما زادت درجة خط العرض . والأرض تجذب الأجسام بقوة مناسبة على العكس لمربع بعدها عن المركز . فينتج أن قوة جذب الأرض كتلة معينة تزيد بزيادة درجة خط العرض . (ثانيا) القوة المركزية الطاردة الناشئة من دوران الأرض حول محورها أعظم فى خط الاستواء منها فى أى خط عرض آخر . وقد رأينا أنه اذا تحركت كتلة ك فى دائرة نصف قطرها س بالسرعة الزاوية ــ يكون لها قوة مركزية طاردة قدرها ك ــ^٢ س . والسرعة الزاوية الناشئة من دوران الأرض واحدة فى جميع خطوط العرض . ولكن نصف قطر الدائرة التى يدور فيها جسم ينقص بزيادة درجة خط العرض . فهو فى خط الاستواء ٤٠٠٠ ميل و ٢٠٠٠ ميل فى خط العرض الذى درجته ٦٠ ويقال على العموم إنه يصغر كلما قربنا من القطب فيصير هناك صفرا . والقوة المركزية الطاردة الناشئة من دوران الأرض تنقص ثقل الجسم . فلهذا أيضا ينقص ثقل الجسم وعجلة التثاقل كلما قرب من خط الاستواء .

(تمارين ٢٤)

تنبيـــه — يحتاج الطالب فى حل هـذه المسائل الى جدول للوغاريتمات ولتُجعل ط = ٣٫١٤٢ .

(١) كم ذبذبة يُتمها بنـدول طوله ١٠ أقدام فى ١٥ ثانيـة اذا كانت ء = ٣٢٫٢ فى مكان التجربة ؟

(٢) أوجد طول بندول الثوانى (مقدرا بالبوصات) فى كل من الأماكن الآتية علما بأن مقادير ء فيها كما يأتى :

اسم المكان	مقـدار ء
(١) باريس	٣٢٫١٨
(٢) جلاسجو	٣٢٫٢
(٣) نيويورك...	٣٢٫١٦
(٤) خط الاستواء	٣٢٫٠٩

(٣) أوجد مقدار ء بالوحدات الفرنسية فى كل من الأماكن الآتية علما بأن طول بندول الثوانى هو كما يأتى :

اسم المكان	طول بندول الثوانى بالسنتيمترات
(١) خط الاستواء	٩٩٫١
(٢) خط العرض الذى درجته ٦٠...	٩٩٫٥
(٣) القطب	٩٩٫٦

(٤) أوجد مقدار ء فى مكان فيه يدق الثوانى بندول طوله ٣٩٫٢ من البوصات . وبأية نسبة تزيد سرعة تذبذبه إذا نُقل الى مكان آخر بحيث يزيد مقدار ء $\frac{1}{4}$ ٪ ؟

(٥) وُجد أن بندولا طوله ٣٧٫٨ من البوصات دق ١٨٣ مرة فى ٣ ثوان فى مكان معين . فما مقدار ء فيه ؟

(٦) اذا طُوِّل بندول ثوان بقدر ١ ./ٍ فكم ثانية يؤخرها فى اليوم ؟

(٧) مكان فيه طول بندول الثوانى = ٣٩,١٢٥ من البوصات . فما طول البندول الذى يُتم ١٠٠ ذبذبة فى الدقيقة فيه ؟

(٨) وُجد أن بندول ثوان أخّر ٢٠ ثانية فى اليوم . فما التغيير الذى يجب أن يعرض لطوله ؟

(٩) اذا تقدمت ساعة مقدار نصف ساعة فى الأسبوع فما النسبة المئوية التى يُغيَّر بها طول بندولها حتى تسير مضبوطة ؟

(١٠) سارت ساعة سيرا مضبوطا فى مكان فيه ء = ٣٢,٢٤ فما خطؤها اليومى فى مكان فيه ء = ٣٢,٠٩ ؟ وبأية نسبة يغير طول البندول حتى تسير سيرا مضبوطا فى هذا المكان الثانى ؟

بند ٩٨ — عزم القصور .

اذا تصوّرنا (كما فى بند ٦٧) جسما يتركب من عدد لا نهاية له من النقط المادية ثم ضربنا كتلة كل منها فى مربع بعدها عن خط معين فان مجموع حواصل الضرب يسمى عزم قصور الجسم بالنسبة لمحور المعين .

ويقال على العموم انه لايجاد عزوم القصور يُرجع الى علم التكامل . واذا تركب الجسم من عدد محدود من النقط المادية قد علمت كتلها ومواضعها فان عزم القصور بالنسبة لمحور ما يمكن ايجاده بالجبر الابتدائى . فاذا رمزنا بالرمز ك الى كتلة كل من أربعة أجسام متساوية (تعتبر نقطا مادية) قد وضعت على رءوس مربع ضلعه ٢ ا فان عزم القصور لها بالنسبة لمحور يمرّ بمركز المربع عموديا عليه هو

$$\text{ك} \times ٢\,\text{ا}^{٢} + \text{ك} \times ٢\,\text{ا}^{٢} + \text{ك} \times ٢\,\text{ا}^{٢} + \text{ك} \times ٢\,\text{ا}^{٢} \quad \text{أى } ٨\,\text{ك}\,\text{ا}^{٢} \,.$$

وكذا يقال ان عزم القصور لثلاث كتل متساوية كل تساوى ك قد وضعت على رءوس مثلث متساوى الأضلاع بالنسبة الى المحور المار بمركز ثقل المثلث عموديا على مستويه هو

$$\text{ك} \times \frac{٤\,\text{ا}^{٢}}{٣} + \text{ك} \times \frac{٤\,\text{ا}^{٢}}{٣} + \text{ك} \times \frac{٤\,\text{ا}^{٢}}{٣} \quad \text{أو } ٤\,\text{ك}\,\text{ا}^{٢}$$

علما بأن ٢ ا طول ضلع المثلث .

بند ٩٩ — **نصف قطر القصور** .

اذا رمزنا بالرمز ك الى كتلة جسم وأخذ الطول س بحيث يكون ك س^{٢} مساويا عزم القصور للجسم بالنسبة الى محور معين فان س يسمى نصف قطر قصور الجسم بالنسبة الى ذلك المحور .

ففى المثال الأول من البند السابق رأينا أن عزم القصور هو ٨ ك أ^{٢} أى ٤ ك × ٢ أ^{٢} ومن حيث ان كتلة الجسم هى ٤ ك يكون مربع نصف قطر القصور بالنسبة الى المحور المعين ٢ أ^{٢} وكذا نجد أن مربع نصف قطر القصور فى المثال الثانى $\frac{٤أ^{٢}}{٣}$

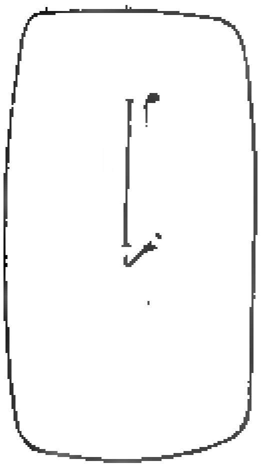
بند ١٠٠ — **جدول عزوم القصور** .

فى الجدول الآتى عزوم القصور وكذا مقادير س^{٢} أى مربع نصف قطر القصور لبعض أجسام بسيطة الشكل بالنسبة الى محاور معينة . وقد اعتبرنا أن هذه الأجسام متجانسة الكثافة ورمزنا الى كتلة كلٍّ بالرمز ك .

	عزم القصور	مقدار س^{٢}
قضيب رفيع طوله ٢ أ بالنسبة الى محور يمر بمنتصفه عموديا على طوله	$\frac{١}{٣}$ أ^{٢} ك	$\frac{١}{٣}$ أ^{٢}
قضيب رفيع طوله ٢ أ بالنسبة الى محور يمر باحدى نهايتيه عموديا على طوله	$\frac{٤}{٣}$ أ^{٢} ك	$\frac{٤}{٣}$ أ^{٢}
أسطوانة مصمتة نصف قطرها أ بالنسبة الى محورها	$\frac{أ^{٢}}{٢}$ ك	$\frac{أ^{٢}}{٢}$
متوازى مستطيلات مصمت طول أحرفه ٢ أ و ٢ ب و ٢ حـ بالنسبة الى محور يمر بمركزه عموديا على الوجه الذى ضلعاه ٢ ب و ٢ حـ .	$\frac{ب^{٢}+حـ^{٢}}{٣}$ ك	$\frac{ب^{٢}+حـ^{٢}}{٣}$
كرة مصمتة نصف قطرها أ بالنسبة الى قطر فيها	$\frac{٢}{٥}$ أ^{٢} ك	$\frac{٢}{٥}$ أ^{٢}

بند ١٠١ — **البنـــدول المركب** .

رأينا أنه يمكن تعيين عجلة التثاقل بالتقريب فى مكان بآلة أتود بالتجارب . ورأينا أيضا أنه يمكن تعيين عجلة التثاقل بالتقريب بتعليق كتلة صغيرة من نهاية خيط رفيع ثم ايجاد الذبذبة . ولكن أضبط الطرق طريقة البندول المركب وهو جسم معلق على محور أفقى . ويدور حول المحور بسهولة بتأثير قوّة التثاقل . وكل بندول قد عُدَّ فيه ثقل الخيط أو القضيب وكذا ثقل الكرة التى بآخره يكون بندولا مركبا .



ليكن الشكل ممثلا لمقطع رأسى يمرّ بالنقطة ر وهى مركز ثقل بندول مركب يتحرك بلا عائق حول محور أفقى مارّ بالنقطة م . فالبندول يتزن عند ماتكون ر أسفل م فى وضع رأسى واذا حُوّل من هذا الوضع يتذبذب يمينا وشمالا فان لم يتذبذب المستقيم م ر فى زاوية تزيد على ٢° أو ٣٦ ٢° على كل من جانبى الوضع الرأسى لا تتوقف مدّة الذبذبة على سعتها بل على موضع ر بالنسبة الى م (كما رأينا فى البندول البسيط) وعلى عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور المارّ بالنقطة م .

فاذا رمزنا بالرمز ف الى المسافة م ر وبالرمز ك ر٢ الى عزم قصور الجسم بالنسبة الى المحور المارّ بالنقطة م فمدّة الذبذبة (نصف الذبذبة التامة) هى

$$\frac{ط\, ر}{\sqrt{د\, ف}}$$

علما بأن ك كتلة الجسم

واذا رمزنا بالرمز ل الى طول البندول البسيط الذى يُتم ذبذبة فى الوقت نفسه ينتج من بند ٩٥

أن $$ط \sqrt{\frac{ل}{د}} = \frac{ط\, ر}{\sqrt{د\, ف}}$$

ومنه $$ل = \frac{ر^{٢}}{ف}$$

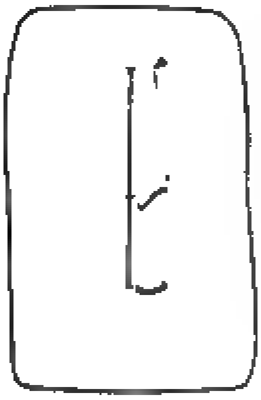
ويسمى الطول ل بطول البندول البسيط المكافئ

بند ١٠٢ — مركز التذبذب ومركز التعليق .

تسمى النقطة م فى الشكل السابق مركز التعليق .

اذا مُدّ م ن الى ب بحيث يكون م ب مساويا $\frac{ك^2}{ف}$ فالنقطة ب تسمى مركز التذبذب المناظر لمركز التعليق م .

العلاقة بين مركز التعليق ومركز التذبذب متبادلة . فاذا تذبذب الجسم حول محور أفقى مارّ بالنقطة ب وكانت نَ نصف قطر القصور حوله ، فَ المسافة ن ب فالمسافة ب م هى $\frac{ك^2}{فَ}$. وتكون مدة الذبذبة حول هذا المحور المارّ بالنقطة ب مساوية مدة الذبذبة حول المحور الموازى له المارّ بالنقطة م . فنستنتج النظرية الهامة الآتيـة :



اذا أمكن ايجاد محورين على جانبين متضادين من مركز ثقل جسم غير منتظم بحيث تكون مدة ذبذبته حول أحد المحورين مساوية مدة الذبذبة حول الآخر فالمسافة بين المحورين تساوى طول البندول البسيط المكافئ .

ويسهل على الطالب أن يدرك سبب قولنا "جسم غير منتظم" لأن مدتى ذبذبة الجسم حول محورين على بعدين متساويين من مركز ثقله متساويتان اذا كان تام التماثل بالنسبة لمركز ثقله .

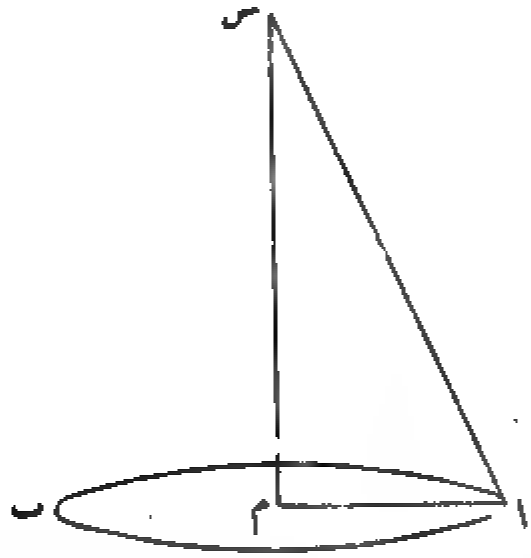
فلو لاحظنا مدة ذبذبة بندول مركب حول محور معين ثم أوجدنا بالتجربة محورا آخر على الجانب المضاد من مركز الثقل تكون مدة الذبذبة حوله مساوية مدة الذبذبة حول المحور المعين . فلا نحتاج إلا لقياس المسافة بين المحورين لنوجد بالضبط طول البندول البسيط التصورى الذى يتحد مع المركب فى مدة الذبذبة . وحينئذ يمكن الرجوع الى القانون المبين فى بند ٩٧ لتعيين عجلة التثاقل فى مكان التجربة .

وقد استعمل هـذه الطريقة الكبتن كيتر (Captain Kater) لتعيين عجلة التثاقل فى أماكن مختلفة من بريطانيا العظمى .

بند ١٠٣ — البندول البسيط المخروطى .

البندول البسيط الذى ترسم كرته دائرة رسماً أفقيا يسمى بندولا بسيطا مخروطيا .

فالبندول س ا معلق من س . والكتلة ا ترسم الدائرة الأفقيــة ا ب حول المحور الرأسى س م .



ليكن ل طول البندول س ا ، ن مدة دورانه دورة كاملة .

فيمكن أن نعبر عن كل من م ا وهو نصــف قطر الدائرة الأفقيــة ، م س وهو ارتفاع نقطة التعليق عن هذه الدائرة وجيب تمام الزاوية ا س م التى يصنعها البندول مع المحور الرأسى بدلالة ل ، ن .

والقوتان الخارجتان اللتان تؤثران فى الكتلة ا هما الشد فى الخيط ا س وثقل الكتلة ثقلا رأسيا الى أسفل لاغير فيجب أن تكون محصلة هاتين القوتين موازنة القوة المركزية الطاردة الناشئة من تحرك ا فى الدائرة الأفقية ا ب . فيمكن اعتبار (١) الشد فى الخيط فى الاتجاه ا س (٢) وثقل الكتلة ا ثقلا رأسيا الى أســفل (٣) والقوة المركزية الطاردة فى الاتجاه م ا مكونة مجموعة من ثلاث قوى متوازية ومن حيث إن هذه القوى الثلاث تؤثر فى اتجاهات موازية الأضلاع ا س ، س م ، م ا من المثلث ا س م نستنتج من مثلث القوى أنها تتناسب مع الأضلاع ا س ، س م ، م ا على التناظر .

فاذا كانت ك كتلة النقطة المادية ا يكون الثقل الرأسى إلى أسفل هو ك ى والقوة المركزية الطاردة هى ك $\left(\frac{٢ ط}{ن}\right)^٢$ × م ا فيكون .

$$\text{س م : م ا} = \text{ك ى : ك} \left(\frac{٢ ط}{ن}\right)^٢ \times \text{م ا} .$$

أو $\frac{\text{س م}}{\text{م ا}} = \frac{\text{ى ن}^٢}{\text{٤ ط}^٢ \text{م ا}}$

ومنــه $\text{س م} = \frac{\text{ى ن}^٢}{\text{٤ ط}^٢}$ .... (١)

ومن هذا القانون نعلم أنه لا يتوقف مقدار س م فى مكان معين إلا على ز وهى مدّة الدورة الكاملة .

وأيضا $\qquad$ س م = س ا جتا ا س م .

، $\dfrac{\text{ء ز}^{2}}{\text{٤ ط}^{2}}$ = ل جتا ا س م

ومنه $\qquad$ جتا ا س م = $\dfrac{\text{ء ز}^{2}}{\text{٤ ط}^{2}\text{ ل}}$ ... ... (٢)

ونحصل من المعادلة (١) على س م بدلالة ز .

ولكون $\overline{\text{م ا}}^{2} = \overline{\text{س ا}}^{2} - \overline{\text{س م}}^{2} = \text{ل}^{2} - \overline{\text{س م}}^{2}$

يمكن إيجاد $\overline{\text{م ا}}^{2}$ بدلالة ل ، ز .

(مثال) بندول مخروطى يدور حول محور رأسى ٢٠ مرة فى الثانية أوجد بعد كرته عن المستوى الأفقى المار بنقطة التعليق .

باستعمال الوحدات الانجليزية نرى أن ز = $\frac{١}{٢٠}$ ، ء = ٣٢ فارتفاع البندول هو .

$$\frac{\text{ء ز}^{2}}{\text{٤ ط}^{2}} = \frac{\text{٣٢} \times \left(\frac{١}{٢٠}\right)^{2}}{\text{٤} \times \text{٩,٨٧}} \text{ من الأقدام}$$

$$= \frac{١}{٤١} \text{ من البوصة تقريبا .}$$

(تمارين ٢٥)

(١) رُسم محور مارّ بمركز ثقل جسم كتلته تساوى ك ثم رُسم آخر يوازى الأوّل على بعد منه قدره ب . فاذا كانت م رمزا الى عزم قصور الجسم بالنسبة الى المحور الأوّل فعزم قصوره بالنسبة الى الثانى هو م + ك ب^{2} .

اذا سلمنا بصحة هذه النظرية فأوجد عزوم القصور للأجسام الآتية مستعملا جدول عزوم القصور الذى ببند ١٠٠ .

(أوّلا) عزم القصور لصفيحة مستديرة بالنسبة الى محور مار باحدى نقط المحيط عمودى على مستوى الصفيحة بفرض أن نصف قطر الدائرة = ا .

(ثانيا) عزم القصور لصفيحة مربعة بالنسبة الى محور مار بأحد رءوسها عمودى على مستويها بفرض أن الضلع = أ .

(ثالثا) عزم القصور لسلك رفيع على شكل محيط دائرة بالنسبة الى محور مار باحدى نقطه عمودى على مستوى الدائرة بفرض أن نصف قطرها = أ .

(رابعا) عزم القصور لقضيب رفيع منتظم منطبق على أحد أحرف مكعب بالنسبة الى محور منطبق على حرف آخر لا يوازى الأول ولا يقابله بفرض أن حرف المكعب = أ .

(٢) قضيب معلق من أحد طرفيه تذبذب ٦٦ مرة فى الدقيقة . أوجد نقطة أخرى فيه لو عُلق منها لكان عدد الذبذبات فى الدقيقة ٦٦ أيضا .

(٣) بندول مخروطى بسيط طوله ٣ أقدام يدور حول محور رأسى ثلاث مرات فى الثانية . أوجد ارتفاع المخروط الذى يرسمه البندول وكذا جيب تمام نصف زاوية رأسه .

(٤) وقف رجل على ظهر حصان راكض فى دائرة قطرها ٢٤ قدما بسرعة ١٠ أميال فى الساعة . فبأية زاوية يجب أن يميل الرجل والحصان على الاتجاه الرأسى ؟

(٥) ركب رجل دراجة قطر عجلتها ٥٠ بوصة فى دائرة نصف قطرها ٥٠ قدما فمال على الاتجاه الرأسى حتى صار بعد أسفل العجلة عن محور الدائرة يزيد على بعد أعلاها عنه مقدار ٣ بوصات . فما سرعة الدراجة بالأقدام فى الثانية ؟

الباب التاسع

الشغل والطاقة

بند ١٠٤ — الشغل .

يقال فى علم الديناميكا إن القوة المؤثرة فى جسم تعمل فيه شغلا اذا تحرك فى اتجاه يميل على اتجاه تأثيرها بزاوية أقل من قائمة . مثلا قوة التثاقل تعمل شغلا فى الجسم الساقط . وقوة توتر الحبل الذى يسحب به قارب على الماء تعمل شغلا فى القارب . وقوة ضغط البخار حين تمدده فى اسطوانة الآلة البخارية تعمل شغلا فى المكبس وهكذا .

اذا تحرك الجسم فى اتجاه تأثير القوة فان الشغل الذى تعمله بينما يقطع مسافة معينة يقدر بحاصل ضربها فى المسافة التى قطعها . فمثلا نعلم أن القوة اللازمة لرفع كتلة رفعا رأسيا تساوى ثقل الكتلة . فاذا رفعت الى مسافة معينة فان الشغل الذى تعمله القوة الرافعة يساوى حاصل ضرب ثقلها فى مسافة الارتفاع .

واذا تحرك الجسم فى اتجاه مائل على اتجاه تأثير القوة فان الشغل الذى تعمله يقدر بضرب مركبتها فى اتجاه تحركه فى المسافة التى يقطعها . فاذا كان ش = الشد فى الحبل الذى به يجر حصان قاربا و هـ زاوية ميل الحبل على اتجاه تحرك القارب فمركبة الشد فى اتجاه تحركه هى ش جتا هـ والشغل المبذول فى شده مسافة معينة يقدر بحاصل ضرب ش جتا هـ فيها .

ينتج من التعريف أن هناك حالتين فيهما لاتعمل القوى شغلا : (فأولا) القوى المتوازنة لاتعمل شغلا . (وثانيا) القوة المؤثرة فى جسم لاتعمل شغلا اذا تحرك فى اتجاه عمودى على اتجاه تأثيرها . وذلك كالبندول البسيط حيث يكون الشد فى الخيط عموديا دائما على اتجاه تحرك الكتلة المعلقة من طرفه فلا تعمل قوة الشد شغلا .

بند ١٠٥ — وحدات الشغل .

الوحدة المستعملة فى التقدير العلمى هى الإرج وهو الشغل الذى يعمله داين أثناء انتقال نقطة تأثيره مسافة سنتيمتر واحد . والوحدة العلمية فى القاعدة الانجليزية هى

القدم — پاوندال . وهى عبارة عن الشغل الذى تعمله قوة قدرها پاوندال أثناء انتقال نقطة تأثيرها مسافة قدم واحدة .

ووحدة الشغل العملية التى يستعملها المهندسون هى وحدة تثاقلية . وفى انجلترا هى القدم — پاوند . وهى الشغل الذى تعمله قوة قدرها ثقل الپاوند أثناء انتقال نقطة تأثيرها مسافة قدم واحدة . وقد رأينا أن ثقل الپاوند يتغير فى النقط المختلفة من سطح الأرض . فليس القدم — پاوند ثابتا . ولكن التغير فى ثقل الپاوند قليل جدا . فلا بأس باستعمال القدم — پاوند وحدة عملية للشغل .

(مثال ١) مامقدار الشغل بالقدم — پاوندات الذى يبذل فى رفع ١٦٨٠ پاوندا من الفحم من منجم عمقه ٧٢٠ قدما ؟

القوة اللازمة لرفع ١٦٨٠ پاوندا تعادل بالضرورة ثقل هذه الكتلة . وهذه القوة تنقل نقطة تأثيرها مسافة ٧٢٠ قدما فالشغل المبذول هو .

١٦٨٠ × ٧٢٠ = ١٢٠٩٦٠٠ قدم — پاوند .

(مثال ٢) كم إرجا فى القدم — پاوند فى مكان به ء = ٩٨١ علما بأن القدم تساوى ٣٠٫٤٧٩٧ من السنتيمترات والپاوند = ٤٥٣٫٥٩ من الجرامات .

ثقل ك من الجرامات هو ك ء من الداينات فثقل الپاوند أى ثقل ٤٥٣٫٥٩ من الجرامات فى مكان به ء = ٩٨١ هو .

٤٥٣٫٥٩ × ٩٨١ من الداينات

ومن حيث إن القدم تكافئ ٣٠٫٤٧٩٧ من السنتيمترات ينتج أن تأثير ثقل الپاوند مسافة قدم يكافئ تأثير قوة قدرها ٤٥٣٫٥٩ × ٩٨١ من الداينات مسافة ٣٠٫٤٧٩٧ من السنتيمترات أى يكافئ قوة قدرها ٤٥٣٫٥٩ × ٩٨١ × ٣٠٫٤٧٩٧ من الداينات قد انتقلت نقطة تأثيرها مسافة سنتيمتر واحد . اذن فى المكان الذى به ء = ٩٨١

يكون القدم — پاوند = ٤٥٣٫٥٩ × ٩٨١ × ٣٠٫٤٧٩٧ من الدرجات .

= ١٣٥٧٠٠٠٠ إرج تقريبا .

بند ١٠٦ — نتيجة الشغل الذى تعمله قوة فى جسم .

اذا أثرت قوة فى جسم ولم تقاوم حركته قوى أخرى فانه يتحرك فى اتجاه تأثيرها بعجلة ثابتة . وفى مثل هذه الحالة تكون النتيجة الكلية للشغل الذى تعمله القوة فى الجسم هى زيادة سرعته .

لتكن ع سرعة جسم كتلته ك عند ماتأخذ قوة ں تؤثر فيه .

من القانون الثانى فى الحركة لنيوتن نستنتج أن ں تعمل فى الجسم عجلة قدرها $\frac{ں}{ك}$ فاذا كانت غ سرعته بعد قطعه مسافة ف ينتج من بند ٢٧ أن .

$$غ^٢ = ع^٢ + ٢ \frac{ں}{ك} ف \quad ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... \quad (١)$$

وبضرب كل من حدود طرفى هذه المعادلة فى $\frac{١}{٢}$ ك يحدث أن .

$$\frac{١}{٢} ك غ^٢ = \frac{١}{٢} ك ع^٢ + ں ف \quad ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... \quad (٢)$$

ويتبين من المعادلة (١) أن الزيادة فى مربع السرعة أى $غ^٢ - ع^٢$ تساوى .

$$٢ \frac{ں ف}{ك}$$

وتسمى المعادلة (٢) أحيانا بمعادلة الطاقة .

اذا أثرت قوة فى جسم وقاومت حركته قوى أخرى فان زيادة سرعته الناشئة من مقدارٍ معين من الشغل أقل فى هذه الحالة منها فى الحالة السابقة . لأن بعض الشغل يبذل فى التغلب على مقاومة حركة الجسم . واذا كانت القوة المؤثرة فى جسم كافية للتغلب على المقاومة لحركته فقط فان الشغل الذى تعمله يصرف كله فى التغلب عليها ولا تزداد سرعته بتأثيرها . ففى المثال الأول من البند السابق نرى أن القوة اللازمة لرفع القفص تساوى ثقله وما احتواه . واذا كان الشدّ فى الحبل الرافع له يساوى ثقله بالضبط يؤول المثال الى حالة فيها تقاوم القوة المؤثرة فى القفص قوة مساوية لها . فنتيجة الشغل المبذول هى تحريك الجسم على رغم المقاومة من غير ازدياد فى سرعته . وهناك مثال آخر فى حصان يجرّ عربة صاعدا على تل بسرعة منتظمة . فالشدّ فى سيور العربة يتغلب على مُركبة قوة التثاقل على التل الى أسفل وقوة الاحتكاك بين الأرض والعجلات وبين العجلات وحواملها وكذا على مقاومة الهواء ومن حيث ان السرعة لاتزداد يكون الشغل كله مبذولا فى تحريك العربة على رغم هذه المقاومات .

بند ١٠٧ — الطاقة .

طاقة الجسم هي الشغل الذى يمكن أن يعمله بحركته أو وضعه . أما مقدرة الجسم المتحرك على عمل شغل بحركته فواضحة من المشاهدات . فمثلا للقنبلة المقذوفة من مدفع كبير خصية التغلب على مقاومة كبيرة بسبب حركتها حتى يمكن أن تخترق لوحا من الفولاذ سمكه بضع بوصات . والحجر المقذوف على سطح الثلج يعمل شغلا على رغم قوي الاحتكاك ومقاومة الهواء .

وأما مقدرة الجسم على عمل شغل بوضعه فواضحة فى كثير من الأمثلة المألوفة فاذا نظرنا الى المِردَاس المعدّ لدك الأرض نشاهد أن قطعة عظيمة من الحديد ترفع مسافة كبيرة عما يراد دكه وليس لها فى هذا الوضع طاقة ناشئة من حركتها . ولكن لها طاقة ناشئة من وضعها فوق الأرض فاذا أسقطت من هذا الوضع فان سرعتها تأخذ فى الازدياد وبذلك تزداد طاقة حركتها على الدوام . وعند وقوع المِردَاس على الأرض تكون طاقة وضعه قد تحولت بأكملها الى طاقة حركة . وهذه تصرف بغتة فى دك الأرض على رغم المقاومة فما تقدم نرى أنه يمكن الحصول على شغل من جسم بسبب حركته أو وضعه . وتسمى طاقة الجسم الناشئة من حركته بطاقة الحركة وتسمى طاقته الناشئة من وضعه بطاقته الكامنة

ومن الواضح أن طاقة الجسم كية يمكن قياسها . وأنها من نوع الشغل . فتقاس بنفس وحداته .

اذا تحرك جسم كتلته ك بسرعة ع فان طاقة الحركة تكون $\frac{1}{2}$ ك $ع^{2}$ بالوحدات المطلقـــة .

(مثـال ١) احسب بالقدم — باوندات طاقة قطار كتلته ١٠٠ طن متحرك بسرعة ٣٠ ميلا فى الساعة .

سرعة ٣٠ ميلا فى الساعة تساوى سرعة ٤٤ قدما فى الثانية وكتلة ١٠٠ طن تساوى كتلة ١٠٠ × ٢٢٤٠ من الباوندات فتكون طاقة القطار بالقدم — باوندالات هى :

$$\frac{1}{2} \times ١٠٠ \times ٢٢٤٠ \times ٤٤^{2}$$

وبجعل ء = ٣٢ تكون الطاقة بالقدم — باوندات هى :

$$\frac{١٠٠ \times ٢٢٤٠ \times ٤٤^{2}}{٢ \times ٣٢} = ٦٧٧٦٠٠٠$$

(مثال ٢) قذف جسم كتلته ك من الجرامات قذفا رأسيا الى أعلا بسرعة $ع_١$ من السنتيمترات فى الثانية . وعند عودته الى نقطة القذف كانت سرعته $ع_٢$ من السنتيمترات فى الثانية. ولمقاومة الهواء كانت $ع_٢$ أقل من $ع_١$. احسب بالارجات مقدار ما فقد من الطاقة .

الجسم يبتدئ بسرعة قدرها $ع_١$. فتكون طاقة حركته وقت القذف $\frac{١}{٢}$ ك $ع_١^٢$. ثم يعود الى نقطة القذف بسرعة $ع_٢$ أى بطاقة حركة قدرها $\frac{١}{٢}$ ك $ع_٢^٢$. وهو أثناء تحركه فى الهواء يعمل شغلا برغم مقاومته له . ويدل على ذلك فقد جزء من الطاقة .

ومقدار الجزء المفقود = $\frac{١}{٢}$ ك $ع_١^٢$ − $\frac{١}{٢}$ ك $ع_٢^٢$

= $\frac{١}{٢}$ ك ($ع_١^٢$ − $ع_٢^٢$) من الارجات .

بند ١٠٨ — ارتباط الشغل بالطاقة .

رأينا فى بند (١٠٦) أنه اذا عملت قوة شغلا فى جسم ولم يقاوم حركته قوى أخرى فان الشغل المبذول ينشأ منه ازدياد فى سرعته . وينتج من معادلة (٢) فى ذلك البند أن الشغل المبذول فى الجسم يساوى الازدياد فى طاقة حركته . لأنه اذا رمز بالرمز ق الى القوة وبالرمز ف الى المسافة التى تنتقل فيها نقطة تأثيرها وبالرمز ك الى كتلة الجسم وبالرمزين ع ، غ الى السرعتين الابتدائية والنهائية فان ق ف يساوى الشغل المبذول فى الجسم ، $\frac{١}{٢}$ ك $غ^٢$ − $\frac{١}{٢}$ ك $ع^٢$ يساوى الازدياد فى طاقة حركته . وقد ثبت فى المعادلة (٢) أن هذين المقدارين متساويان . فنستنتج أنه اذا أثرت قوة فى جسم ولم يقاومها قوى أخرى فان مقدار الشغل المبذول فيه يساوى الازدياد فى طاقة حركته . واذا عملت قوة شغلا فى جسم وقاوم حركته قوى أخرى فان الازدياد فى طاقة حركته يقل عما لو كانت الحركة غير مقاومة بمقدار الشغل اللازم للتغلب على القوى المقاومة . وأحيانا يبذل جميع الشغل فى التغلب على القوى المقاومة وحينئذ لا تزداد طاقة حركته . ويكون مقدار الشغل المبذول مساويا الزيادة فى الطاقة الكامنة .

ومثال الحالة التى فيها يبذل جميع الشغل فى زيادة طاقة الحركة جسم كتلته ك ساقط من ارتفاع ف فالقوة التى تؤثر فيه هى ثقله ك ء . والمسافة التى تنتقل فيها

نقطة تأثير هذه القوة هى ف فالشغل المبذول فى الجسم هو ك ى ف فاذا أهملنا مقاومة الهواء فان الجسم بعد سقوطه مسافة ف تكون سرعته هى غ التى يحصل على قيمتها من المعادلة .

$$غ^٢ = ٢ ى ف$$

فطاقة الحركة وهى $\frac{١}{٢}$ ك $غ^٢$ مساوية ك ى ف أى أن طاقة الحركة تساوى الشغل المبذول فى الجسم .

ومثال الحالة التى فيها يبذل الشغل فى التغلب على مقاومة قوى أخرى كتلة ترفع عن الأرض بانتظام . فالشغل يبذل فى التغلب على المقاومة وهى ثقل الجسم . وهو يكافئ ازدياد الطاقة الكامنة فيه أى طاقته الحادثة من ارتفاعه عن سطح الأرض . ومقدارها هو مقدار الشغل الكامن فى الجسم بسبب وضعه . فاذا كانت ك كتلة الجسم ، ف المسافة التى ارتفعها فان الشغل الذى يمكن أن يُحصل عليه منه اذا أسقط هو بالضرورة ك ى ف . وهذا هو مقدار الشغل الذى بُذل فى رفعه المسافة ف برغم تأثير القوة ك ى .

بند ١٠٩ — عدم فناء الطاقة .

فى الأمثلة السهلة المارّة فى البند السابق لبيان ارتباط الشغل الذى تعمله قوة بازدياد طاقة الجسم أثبتنا أن مقدار الشغل المبذول يساوى الازدياد فى الطاقة . ومن نظرية عدم فناء الطاقة نعلم أن جميع الأحوال التى تعمل فيها مجموعة من القوى شغلا فى جسم تزيد فيها دائما طاقة الجسم مقدارا مكافئا للشغل . وقد تكون هذه الطاقة طاقة حركة محضة أو طاقة كامنة محضة . أو يكون جزء منها طاقة حركة والجزء الآخر طاقة كامنة . وفى كل حالة مجموع الطاقتين مساو مقدار الشغل الذى تعمله مجموعة القوى فى الجسم . وبالعكس اذا كان الجسم يفقد بعض طاقته فاننا نستنتج أن شغلا يُبذل لصدّ مقاومات وأن مقدار مايفقد من الطاقة يساوى مقدار الشغل المبذول و يمكن التعبير عن النظرية بما يأتى :

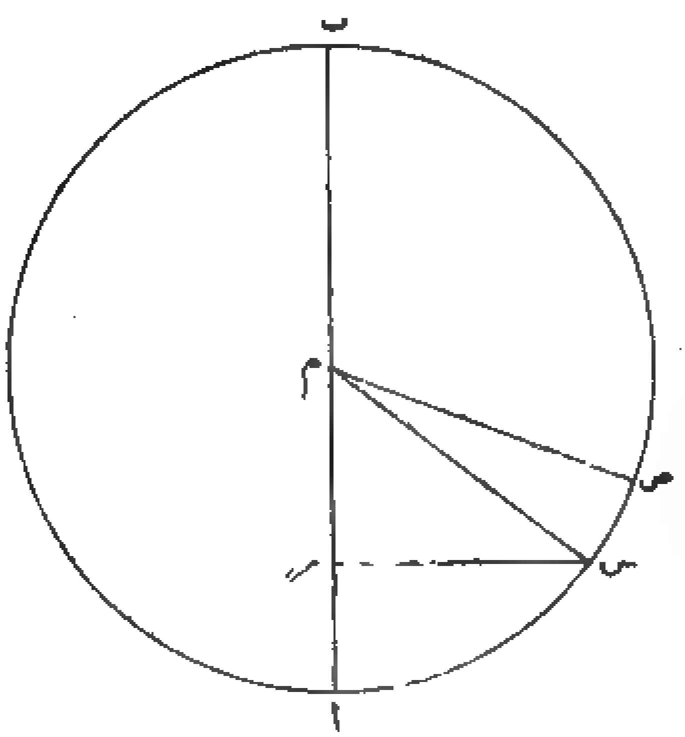
الطاقة لايمكن أن تفنى كما أنها لاتستحدث . ولكن يمكن نقلها من جسم الى آخر . وقد تتحول من طاقة حركة الى طاقة كامنة أو العكس . ولكنها كالمادة لاتفنى .

قد يظهر فى كثير من الظواهر المشاهدة أن نظرية بقاء الطاقة ليست صحيحة ، فان القطار يسكن عند حبس البخار واستعمال الصادّات (الفرامل) . وكرة البليارد المضروبة تسكن بعد مدّة والحجر المقذوف قذفا رأسيا الى أعلى يعود الى الأرض بطاقة حركة أقل مما بدأ بها . ففى كل حالة يظهر كأن الطاقة قد فنيت ولكن يجب أن نلاحظ أن شغلا يبذل لمقاومة قوة الاحتكاك فى كل حالة وهذا الشغل وإن ظهر فناؤه يتحول الى حرارة وهى نوع من الطاقة .

ويتعلق بعلم الطبيعة البحث فى الطاقة التى يظهر فناؤها حين يتحرك جسم مع مقاومته قوة الاحتكاك . وانما نشير فى هذا المقام الى أنه عند اعتبار الشغل المبذول لعوّق المقاومات وقوى الاحتكاك تثبت نظرية بقاء الطاقة فى كثير من التجارب .

بند ١١٠ — حركة الجسم فى دائرة رأسية .

ثُبت جسم (نقطة مادية) فى طرف قضيب رفيع يدور فى الدائرة الرأسية ا س ب حول طرفه الآخر م والمطلوب ايجاد العلاقة بين سرعته وقت مروره بأسفل نقطة وهى ا من الدائرة وسرعته وقت مروره بأى نقطة أخرى مثل س ؛



نرمز بالرمز ع الى السرعة فى ا
وبالرمز غ الى السرعة فى س
وبالرمز نق الى نصف قطر الدائرة
وبالرمز هـ الى الزاوية ا م س

فطاقة الحركة فى ا تساوى $\frac{1}{2}$ ك ع^2 باعتبار أن ك كتلة الجسم. وطاقة الحركة فى س تساوى $\frac{1}{2}$ ك غ^2 . فمقدار مافقد من طاقة الحركة بعد أن قطع الجسم القوس ا س يساوى .

$$\frac{1}{2} \text{ك} (\text{ع}^2 - \text{غ}^2)$$

ومقدار ما اكتسب من الطاقة الكامنة عبارة عن ثقل الجسم مضروبا فى الارتفاع الذى يبلغه . فاذا رسمنا س ـ ر عمودا على م ا يكون مقدار ما اكتسب من الطاقة الكامنـة .

= ك ى × ا ر = ك ى (م ا — م ر)

= ك ى (م ا — م س جتا هـ) = ك ى ن (١ — جتا هـ)

وبمقتضى نظرية بقاء الطاقة يكون مقدار ما اكتسب من طاقة الوضع مساويا مقدار ما فقد من طاقة الحركة فينتج أن .

$\frac{1}{٢}$ ك ($ع^٢$ — $غ^٢$) = ك ى ن (١ — جتا هـ)

ومنـه $ع^٢$ — $غ^٢$ = ٢ ى ن (١ — جتا هـ)

(نتيجة ١) اذا سكن الجسم فى ص وكانت الزاوية ا م ص = و نجعل غ = صفرا ، هـ = و فى المعادلة السابقة فينتج أن .

$ع^٢$ = ٢ ى ن (١ — جتا و)

واذا أمكن إيجاد الزاوية و بالتجربة فمن هذا القانون نحصل على السرعة ع فى أسفل نقطة .

(نتيجة ٢) إذا وصل الجسم الى أعلى نقطة وهى ب نجعل غ = صفرا ، هـ = ط فى معادلة الطاقة . فلكون جتا ط = — ١ ينتج أن .

$ع^٢$ = ٤ ى ن

ومنـه ع = ٢ $\sqrt{ى ن}$

وبعـد وصوله الى ب يسقط بالضرورة على القوس ب حـ ا فيمرّ بالنقطة ا وتكون سرعته فيها الآن كما كانت من قبل .

بند ١١١ — قدرة الحصان .

التعريف الذى ذكرناه فى بند ١٠٤ للشغل لا يتضمن شيأ يتعلق بالزمن . ولكن من المهم فى الأحوال العملية معرفة المعدّل الذى فيه يتم عامل شغلا . ويجعل المهندسون الآلات فصولا على حسب معدّل شغلها . وقد قدّر جمس واث (James Watt)

منقح القاطرة البخارية شغل الحصان فى الدقيقة الواحدة بالمقدار ٣٣٠٠٠ قدم — باوندات ولكن يعتقد الآن أن فى هــذا التقدير زيادة . مع أنه لايزال يقال إن قــدرة الآلة تنجز . هذا المقدار من القدم — باوندات فى الدقيقة قدرة حصان واحد . وأن قدرة الآلة التى تتم نصف هــذا المقدار من القدم — باوندات فى الدقيقة نصــف قدرة حصان . وان قــدرة الآلة التى تتم عشرة أمثــال هذا المقدار من القدم — باوندات فى الدقيقة عشرة أمثال قدرة الحصان وهكذا وتقدّر قــدرة الحصان فى الوحدات الفرنســية بالمقدار ٧٥ كيلو جرامترا فى الثانية أى بالشغل المبذول لرفع كتلة قدرها ٧٥ كيلو جراما بقدر ارتفــاع متر فى ثانية من الزمن وهذا يعادل المقدار السابق ذكره فى الوحدات الانجليزية .

(مثــال) اذا أوقع ضغط قدره طن على مسافة طولها ١٠ ياردات فما مقدار الشغل المبذول بالقدم — باوندات ؟ وما قدرة الآلة البخارية التى تنجز هذا الشغل فى نصف دقيقة مقدرة بقدرة الحصان ؟

الطن = ٢٢٤٠ باوندا

، ١٠ ياردات = ٣٠ قدما

فمقدار الشغل بالقدم — باوندات هو

$$٣٠ \times ٢٢٤٠ = ٦٧٢٠٠$$

واذا أنجزت الآلة هذا الشغل فى نصف دقيقة فانها تنجز ضعفه فى دقيقة واحدة . فقوتها مقدّرة بقدرة الحصان تساوى

$$\frac{١٣٤٤٠٠}{٣٣٠٠٠} = ٤ \frac{٤}{٥٥}$$

(تمــارين ٢٦)

(١) اذا قُذفت قنبلة كتلتها ٣ كيلوجرامات بسرعة ٤٨٠ مــترا فى الثانيــة فمــا مقدار الشغل (مقــدرا بالكيلو جرامتر) الصادر من قوة انفجار البارود فى القنبلة ؟ وما القيمة المتوسطة لتلك القوة اذا كان طول أنبوبة المدفع مترا واحدا ؟

اذا قذف المدفع ٢٠ قنبلة كهذه فى الدقيقة فمــا قدرته بقدرة الحصان ؟

(٢) رصاصة كتلتها ٦٠ جراما خرجت من فوهة بندقية بسرعة ٣٠٠ متر فى الثانية فاذا كان طول أنبوبة البندقية ٨٠ سنتيمترا فما القيمة المتوسطة للقوة الدافعة للرصاصة بالداينات ؟

(٣) سقطت مطرقة كتلتها ١٠٠٠٠ كيلوجرام مسافة مترين فطبعت فى قطعة حديد أثرا عمقه ٢,٥ من السنتيمترات . أوجد القيمة المتوسطة لقوة ضغط المطرقة للحديد .

(٤) تحرك جسم كتلته ١٢ كيلوجراما من حالة السكون مدة معينة بتأثير قوة ثابتة تعمل فيه شغلا قدره ١٠ كيلوجرامترات . فما سرعته فى نهاية المدة ؟

(٥) ثقبت صفيحة من الحديد سمكها سنتيمتر واحد بقوة ضاغطة قدرها ١٦٠٠٠٠ كيلوجرام فما مقدار الشغل المستنفد فى ذلك مقدرا بالكيلوجرامتر اذا كانت مقاومة الحديد للثقب ثابتة ؟

(٦) لماذا يسهل علينا ادخال مسمار فى قطعة خشب بطرقه بمطرقة مع أنه قد لايمكن ادخاله بالضغط ؟

(٧) تحرك جسم كتلته ١٠٠٠ كيلوجرام بسرعة ٥٠٠ سنتيمتر فى الثانية فصادم عائقا . مامقدار طاقة حركة الصدمة ؟

واذا رجع العائق الى الوراء مسافة مليمتر واحد فما القيمة المتوسطة لقوة الصدمة ؟

(٨) قارن بين كمية التحرك وأيضا بين طاقة الحركة الحادثة فى كل من جسمين كتلتاهما ك ، ك َ بتأثير قوتين متساويتين .

أولا — اذا كانت مدتا تأثير القوتين متساويتين .

ثانيا — اذا انتقلت نقطتا تأثير القوتين مسافتين متساويتين أثناء التأثير .

(٩) قنبلة متحركة بسرعة ٣٠٠ متر فى الثانية انفجرت منقسمة الى عشرة أجزاء متساوية كتلة كل منها كيلوجرام واحد . فاذا كان مقدار طاقة الحركة الحادثة من الانفجار هو ٤٠٠٠ كيلوجرامتر وفرض أن أحد أجزاء القنبلة لم يتغير اتجاهه فما السرعة الجديدة لذلك الجزء ؟

(١٠) تدار مضخة بكتلة قدرها ٢٠٠٠ كيلوجرام فاذا فرض أن هذه الكتلة تهبط مسافة متر واحد فى كل دفعة من دفعات المكبس وأن المكبس يتم ١٠ دفعات فى الدقيقة فأوجد عدد لترات الماء التى ترفعها هذه المضخة فى الدقيقة من عمق ٥٠ مترا [ليس لكيفية رفع الكتلة بين دفعة وأخرى دخل فى حل هذه المسألة]

(١١) سير لا طرف له يدور على بكرتين وهو مشدود بسرعة ٣٠٠ قدم فى الدقيقة فاذا وصل قدره تعادل ٥ أمثال قدرة الحصان فما مقدار الشدّ فيه ؟

(١٢) قطار كتلته ١٠٠ طن يجرى بسرعة ٤٠ ميلا فى الساعة فاذا كانت المقاومة ٨ باوندات لكل طن فما القدرة التى بها تشتغل القاطرة ؟

(١٣) قطر أسطوانة البخار فى آلة بخارية ½ ٣ من الأقدام وطول دفعة المكبس ٨ أقدام فاذا كانت القيمة المتوسطة لضغط البخار للكبس ٣٥ باوندا لكل بوصة مربعة فما القدرة التى بها تشتغل هذه الآلة بينما يتم المكبس ١٢ دفعة فى الدقيقة ؟

(١٤) رجل وزنه ١٦٨ باوندا بذل ٣٦٠٠٠٠ قدم — باوند من الشغل لمقاومة التثاقل فى صعود تل . ما الارتفاع الذى بلغه ؟

(١٥) وضع جسم كتلته ١٠ باوندات على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٣٠° ثم جُرّ الى الأعلى مسافة ٥٠ قدما . ما مقدار الشغل الذى بذلته القوّة الجارة ؟

واذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٠٫٣ فما مقدار الشغل المبذول فى التغلب على الاحتكاك ؟

(١٦) جسم كتلته ك تحرّك من حالة السكون بتأثير قوة بذلت فيه شغلا قدره ش من الوحدات المطلقة فى زمن معين . ما سرعته فى نهاية ذلك الزمن ؟

واذا كان مقدار الشغل المبذول فى الجسم = ٧٥ قدم — باوندا وكانت كتلته ٢٧ باوندا فما السرعة النهائية ؟

(١٧) زلق جسم كتلته ١٠ باوندات على مستوٍ مائل ارتفاعه ٢٥ قدما منحدرا فبلغ أسفله بسرعة ٣٠ قدما فى الثانية . ما مقدار الشغل المبذول أثناء الحركة فى التغلب على الاحتكاك والمقاومات الأخرى ؟

الباب العاشر

القوى السريعة الدفع

بند ١١٢ — الدفع والقوى السريعة الدفع .

دفع قوة عبارة عن حاصل ضربها فى زمن تأثيرها . والقوة السريعة الدفع هى قوة لا نهائية فى الكبر تؤثر فى جسم مدة غاية فى القصر .

ومثال القوة السريعة الدفع التأثير بين كرة ومضرب أثناء صدّه لها فقبل أن تضرب به كانت تسير بسرعة معينة فى اتجاه معين . فاذا ضربت سارت بسرعة أخرى فى اتجاه آخر . وهذا التغير فى حركتها ناشئ من القوة التى بها أثر المضرب فيها وقت تماسهما مدة غاية فى القصر . فذلك مثال لحدوث تغير محدود فى سرعة الجسم أثناء مدة غاية فى القصر . ولا بد حينئذ أن تكون القوة التى أحدثت هذا التغير عظيمة جدا . فالتأثير بين الكرة والمضرب مثال للقوة السريعة الدفع .

اذا أثرت قوة محدودة فى جسم مدة بالغة غاية القصر فانها تحدث تغيرا يسيرا جدا فى سرعته . والتأثير بين الكرة والمضرب ربما يحدث فى أقل من جزء من عشرة آلاف من الثانية . ومع ذلك قد حدث فى هذا الزمن تغير محدود فى السرعة . أما التغير الذى ينشأ من تأثير قوة التثاقل فى الكرة أثناء ذلك الزمن فهو ٠٫٠٠٣٢ من القدم فى الثانية فقط وهو يسير جدا بالنسبة الى التغير الذى أحدثه المضرب فيها .

ويقدر تأثير القوى السريعة الدفع بمقدار دفعها . ويمكن البرهنة على أن هذا يساوى ما تحدثه من التغير فى كمية التحرك .

بند ١١٣ — من حيث ان الفعل ورد الفعل يتساويان ينتج أنه اذا حدث دفع بين جسمين فالقوة المؤثرة فى أحدهما مساوية ومضادة القوة المؤثرة فى الآخر .

فنرى من القانون الثانى للحركة أن التغير الحادث فى كمية تحرك أحد الجسمين مساوٍ ومضاد التغير الحادث فى كمية تحرك الآخر . فاذا أطلق مدفع فكمية تحرك القنبلة أثناء خروجها من فوهته مساوية ومضادة كمية التحرك التى بها يندفع الى الوراء .

(مثـال) أطلقت قنبلة كتلتها ٤٠ باوندا من مدفع كتلته ١٢ طنا بسرعة ٨٠٠ قدم فى الثانية فما السرعة التى بها يندفع المدفع الى الوراء ؟

اذا اعتبرنا الباوند وحدة للكتلة وسرعة القدم فى الثانيـة وحدة للسرعة تكون كمية تحرك القنبلة ٤٠ × ٨٠٠ = ٣٢٠٠٠ فاذا كانت ع سرعة رجوع المدفع تكون كمية تحركه ١٢ × ٢٢٤٠ ع . وهذه تساوى كمية تحرك القنبلة فيكون :

$$١٢ \times ٢٢٤٠ \text{ ع} = ٣٢٠٠٠$$

ومنـه ع = $\frac{٢٥}{٢١}$ من الأقدام فى الثانية

بند ١١٤ — تصادم الأجسام .

اذا تصادم جسمان فان زمن تماسهما يكون غاية فى القصر ولكن يمكن تقسيم هذا الزمن الى مدتين . ففى المدة الأولى يتماسان تماسا تاما فيضغط كل منها بتأثير الآخر فيه فيتغير شكله وما دام الضغط مزدادا تأخذ السرعتان فى أن تتساويا تقريبا . فاذا بلغ حده الأعلى يتحرك الجسمان معا بسرعة واحدة كما لو كانا جزأين من جسم صلب واحد ثم تلى مدة الضغط مدة الاسترداد فكل جسم فى السكون فيه خصية المرونة وبها يقاوم التغير فى الشكل فاذا حدث فيه تغير فان مرونته تعمل على استرداده شكله الأصلى . ففى المدة الأولى من زمن التصادم تقاوم مرونة الجسمين ضغطهما . وفى المدة الثانية تعمل مرونتهما على رجوعهما الى شكليهما الأصليين . فيأخذان فى أثناء المدة الثانيـة فى أن ينفصل كل عن الآخر . وفى آخرها يتحركان متباعدين .

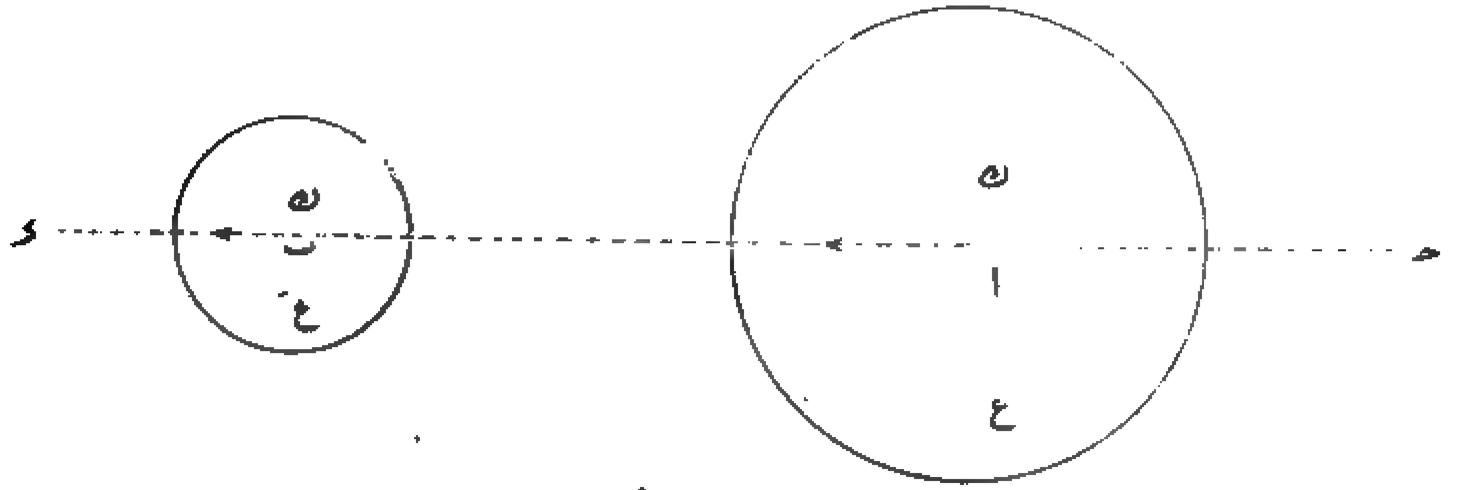
وسنتكلم على حالتين فقط من أحوال التصادم . الأولى تصادم كرتين ملساوين تتحركان فى مستقيم واحد . والثانية صدم كرة مستويا صدما عموديا .

بند ١١٥ — تصادم الكرات غير المرنة .

كل جسم فيه بعض المرونة . ولكن هناك أجساما كالطين مثلا مرونتها يسيرة جدا ونبحث فى هذا البند فى تصادم كرتين لا مرونة لهما وهى حالة تصورية .

لتكن ا ، ب كرتين ملساوين غير مرنتين يتحرك مركزاهما على مستقيم واحد ولننظر فى الحالة التى فيها تتحرك الكرتان فى اتجاه واحد هو حـ ء قبل التصادم . ولنفرض أن كتلتى ا ، ب هما ك ، كَ وأن سرعتيهما ع ، عَ . وأن ع أكبر من عَ

أى أن ا تسير وراء ب . لكون الكرتين لا مرونة لهما لاتنفصلان بعد التصادم بل تتحركان بسرعة واحدة كما لو كانتا جزأين من جسم صلب . فاذا رمزنا بالرمز غ الى



سرعتيهما بعد التصادم يمكن ايجاد قيمة غ اذ أن تأثير ا فى ب وقت التصادم مساوٍ ومضاد تأثير ب فى ا فكمية التحرك التى تكتسبها ب مساوية كمية التحرك التى تفقدها ا . وكمية التحرك التى تكتسبها ب هى

كَ غ — كَ عَ

وكمية التحرك التى تفقدها ا هى

ك ع — ك غ

ولكون هذين المقدارين متساويين ينتج أن

ك ع — ك غ = كَ غ — كَ عَ

ومنه غ = (ك ع + كَ عَ) / (ك + كَ)

ومن هذه المعادلة نعلم قيمة السرعة المشتركة بعد التصادم بدلالة كتلتى الجسمين وسرعتيهما قبله .

ويسهل تطبيق هذا القانون على الحالة التى فيها يتحرك الجسمان فى اتجاهين متضادين قبل التصادم وذلك باعتبار أن سرعة أحدهما موجبة وسرعة الآخر سالبة .

(مثال) كرتان لامرونة لهما كتلتاهما ٨ باوندات ، ١٥ باوندا تتحرك احداهما بسرعة ٦ أقدام فى الثانية والأخرى بسرعة ٣ أقدام فى الثانية . أوجد السرعة المشتركة بعد التصادم اذا تحركتا قبله (أولا) فى اتجاه واحد (وثانيا) فى اتجاهين متضادين .

هنا ك = ٨ ، كَ = ١٥

فاذا تحركتا قبله فى اتجاه واحد كانت ع = ٦ ، عَ = ٣ فالسرعة المشتركة بعده هى

$$\frac{٦ \times ٨ + ٣ \times ١٥}{٨ + ١٥} = \frac{٩٣}{٢٣}$$ من الأقدام فى الثانية .

واذا تحركتا قبله فى اتجاهين متضادين نعتبر سرعة إحدى الكرتين (ولتكن التى كتلتها ٨ باوندات) موجبة وسرعة الأخرى سالبة

فتكون ع = ٦ ، عَ = − ٣

والسرعة المشتركة بعد التصادم هى

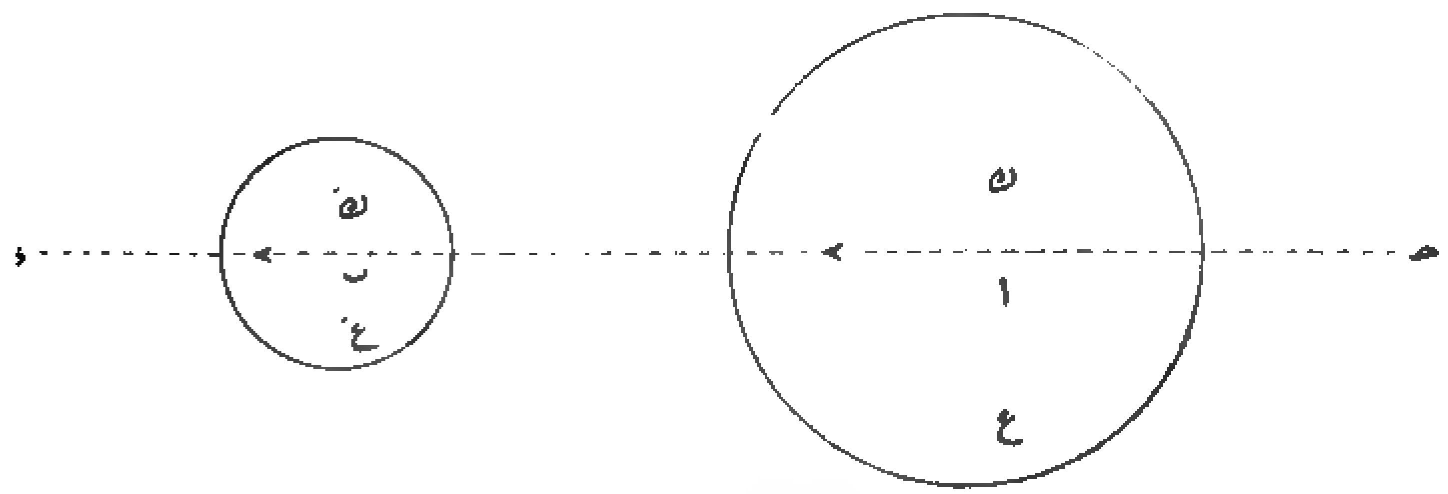
$$\frac{٦ \times ٨ - ٣ \times ١٥}{٨ + ١٥} = \frac{٣}{٢٣}$$ من القدم فى الثانية .

بند ١١٦ — تصادم الكرات المرنة .

أوجد نيوتن بالتجربة أنه عند تصادم كرتين مرنتين تكون نسبة السرعة النسبية بعد التصادم الى السرعة النسبية قبله مساوية نسبة معلومة لا تتوقف إلا على نوع المادتين المصنوعة منهما الكرتان . وتسمى هذه النسبة بمعامل الاسترداد للمادتين وسنأتى على وصف تجارب نيوتن فى بند (١١٨) .

لتكن ا ، ب ملساوين مرنتين يتحرك مركزاهما فى مستقيم واحد هو حـ ى ولنبحث كما فى البند السابق فى الحالة التى فيها تتحركان فى اتجاه واحد .

ولتكن ك ، كَ كتلتى الكرتين ا ، ب ولتكن ع ، عَ سرعتيهما قبل التصادم علما بأن ع أكبر من عَ بحيث تكون ا لاحقة ب . ونفرض أن غ ، غَ



سرعتا ا ، ب بعد التصادم فالسرعة النسبية قبله (أى السرعة التى بها تقترب ا من ب) تساوى ع — عَ والسرعة النسبية بعده أى السرعة التى بها تنفصل الكرتان تساوى غَ — غ فاذا رمزنا بالرمز ى الى معامل الاسترداد بين الكرتين يكون

$$غَ - غ = ى (ع - عَ) \qquad \text{.......................} \; (١)$$

وكما فى البند السابق لا يفقد شىء من كمية التحرك فيكون

$$كَ غَ + ك غ = كَ عَ + ك ع \qquad \text{.......................} \; (٢)$$

فالمعادلتان (١) ، (٢) آنيتان ومنهما يمكن إيجاد غ ، غَ بدلالة ك ، كَ ، ع ، عَ ، ى فبحلهما ينتج أن

$$غَ = \frac{ك ع + كَ عَ}{ك + كَ} + \frac{ك ى (ع - عَ)}{ك + كَ} \qquad \text{.......................} \; (٣)$$

$$غ = \frac{ك ع + كَ عَ}{ك + كَ} - \frac{كَ ى (ع - عَ)}{ك + كَ} \qquad \text{.......................} \; (٤)$$

واذا كانت ى = صفرا أى اذا كانت كل من الكرتين لامرونة لها فان قيمتى غ ، غَ المستخرجتين من المعادلتين (٣) ، (٤) تتساويان وتكون قيمة كل هى

$$\frac{ك ع + كَ عَ}{ك + كَ}$$

كما فى البند السابق .

، ى كسر حقيق لجميع الأجسام التى فى الكون ولكن ربما يعثر الطالب على مسائل تصورية فيها ى = ١ . ويقال اذ ذاك ان الكرتين تامتا المرونة .

(مثال) كرتان كتلتاهما ٧ باوندات ، ١٣ باوندا تتحركان بسرعتى ٥ أقدام فى الثانية ، ٣ أقدام فى الثانية . أوجد سرعتيهما بعد التصادم

(أولا) اذا تحركتا فى اتجاه واحد .

(ثانيا) اذا تحركتا فى اتجاهين متضادين .

$$[\, ى = \tfrac{١}{٢} \,]$$

هنا ك = ٧ ، كَ = ١٣

(أولا) عند ما تتحركان فى اتجاه واحد تكون ع = ٥ ، عَ = ٣

فاذا رمزنا بالرمزين غ ، غَ الى السرعتين بعد التصادم يكون

$$غَ - غ = \frac{١}{٢}(٥ - ٣) = ١$$

$$، \quad ١٣ غَ + ٧ غ = ٥ \times ٧ + ٣ \times ١٣$$

$$= ٧٤$$

فبحلهما نجـــد أن

$$غَ = \frac{٨١}{٢٠} = ٤\frac{١}{٢٠} \text{ من الأقدام فى الثانية .}$$

$$، \quad غ = \frac{٦١}{٢٠} = ٣\frac{١}{٢٠} \text{ من الأقدام فى الثانية .}$$

(ثانيـا) عنـد ما تتحركان فى اتجاهين متضادين نعتبر اتجاه تحرك الكرة التى كتلتها ٧ باوندات موجبا فتكون ع = ٥ ، عَ = − ٣ فاذا رمزنا بالرمزين غ ، غَ الى السرعتين بعد التصادم نحصل على المعادلتين الآتيتين

$$غَ - غ = \frac{١}{٢}\{٥ - (-٣)\}$$

$$= ٤$$

$$، \quad ١٣ غَ + ٧ غ = ٥ \times ٧ - ٣ \times ١٣$$

$$= -٤$$

ومنهـا

$$غَ = \frac{٢٤}{٢٠} = \frac{٦}{٥} \text{ من الأقدام فى الثانية}$$

$$، \quad غ = -\frac{٥٦}{٢٠} = -\frac{١٤}{٥} \text{ من الأقدام فى الثانية}$$

ولكون غ سالبة ينعكس اتجاه تحرك الكرة التى كتلتها ٧ باوندات بعد التصادم .

بند ١١٧ — صدم كرة مارنة لسطح مستوٍ أملس ثابت .

نفرض أن الكرة تتحرك قبل التصادم فى اتجـاه عمودى على السطح . فلكون تأثيرها فيـه عموديا عليه ينتج أنها تأخذ بعـد الاندفاع منه الاتجاه المستقيم الذى سارت فيه قبل التصادم .

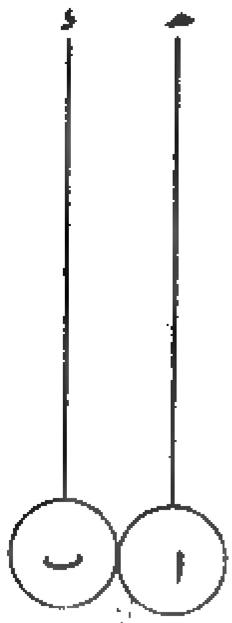
زمن بالرمز ع الى السرعة قبل التصادم وبالرمز غ اليها بعده ويمكن اعتبار سطح المستوى كرة كتلتها عظيمة جدا اذا قورنت بكتلة الكرة الضاربة فلا تتغير سرعته بالتصادم فنجعل عَ = صفرا ، غَ = صفرا فى المعادلة (١) من بند ١١٦ فينتج أن :

$$- غ = ى ع \quad أو \quad غ = - ى ع$$

ومن هذا نحصل على مقدار السرعة بعد التصادم وتدل العلامة السالبة على انعكاس اتجاه السرعة .

بند ١١٨ — تجارب نيوتن .

نبين فيما يلى الطريقة التى بها أجريت تجارب نيوتن لتعيين معامل الاسترداد بين كرتين من مادتين معينتين .



(شكل ١)

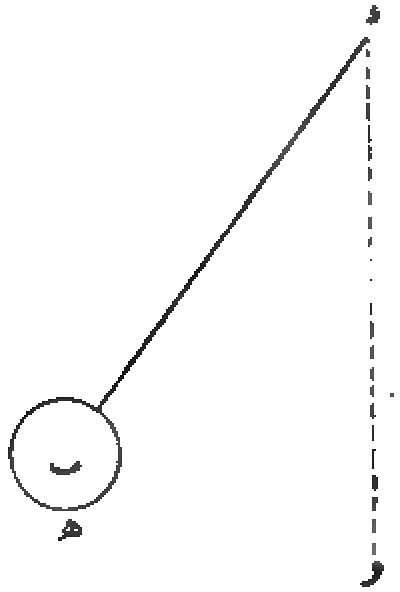
علقت الكرتان ا ، ب بخيطين متساويى الطول من النقطتين حـ ، ء على خط أفقى

ويتبين من الشكل الأول وضعهما فى حالة السكون وفيه الخيطان احـ ، بء رأسيان .

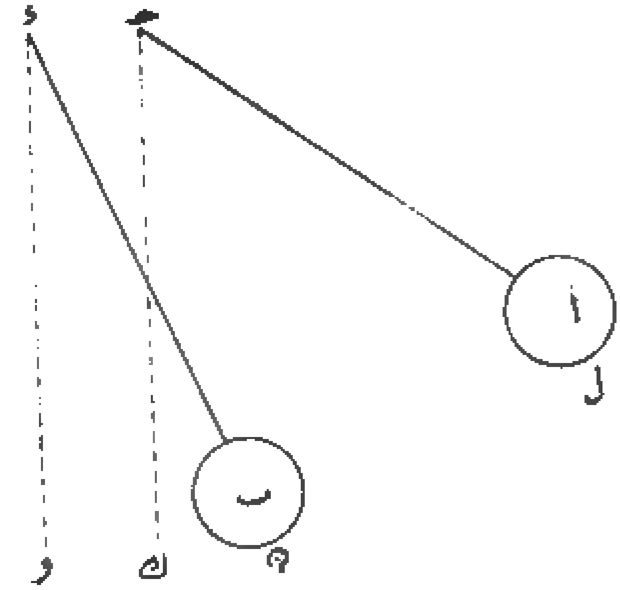
ثم حركت الكرة ب حتى تأخذ الوضع هـ المبين فى الشكل الثانى وقيست الزاوية هـ ء و التى يصنعها هـ ء مع الاتجاه الرأسى ثم تركت ب فصدمت الكرة الساكنة ا بحيث أخذ التأثير بين الكرتين اتجاه المستقيم الواصل بين مركزيهما أى اتجاه المستقيم الذى تتحرك فيه الكرة ب وقت التصادم .

وبعد التصادم قطعت كل من الكرتين قوس دائرة فقيست زاويتاهما و ء د ، ك حـ ل المبينتان فى الشكل الثالث .

ومتى عرفنا مقدار الزاوية هـ ء و أمكن من بند (١١٠) ايجاد سرعة ب وقت صدمها ا ومتى عرفنا مقدار الزاويتين و ء د ، ك حـ ل اللتين يدور فيهما الخيطان بعد التصادم يمكن من البند عينه تقدير سرعتى ب ، ا بعد التصادم مباشرة .



(شكل ٢)



(شكل ٣)

ومن مثل هذه التجارب استنتج نيوتن أن النسبة بين السرعة النسبية لكرتين من مادتين معينتين بعد تصادمهما والسرعة النسبية قبله ثابتة وتسمى هذه النسبة الآن بمعامل الاسترداد .

(تمارين ٢٧)

(١) قذفت رصاصة كتلتها ٤٥ جراما من بندقية كتلتها ٣ كيلوجرامات فاندفعت هذه الى الوراء بسرعة ٥ أمتار فى الثانية . فما السرعة الابتدائية للرصاصة ؟

(٢) كرتان لا مرونة لهما كتلتاهما ١٥ كيلوجراما ، ١٧ كيلوجراما تحركتا فى مستقيم واحد بسرعتى ١٧ مترا فى الثانية ، ١٥ مترا فى الثانية . أوجد سرعتيهما بعد تصادمهما .

(أولا) اذا تحركتا قبل التصادم فى اتجاه واحد .

(ثانيا) « « « فى اتجاهين متضادين .

(٣) تصادمت كرتان كتلتاهما ١٣ كيلوجراما ، ١١ كيلوجراما وكانتا متحركتين فى اتجاهين متضادين بسرعتى $٣\frac{١}{٤}$ من الأمتار فى الثانية ، $٤\frac{١}{٢}$ من الأمتار فى الثانية . أوجد سرعتيهما بعد التصادم علما بأن معامل الاسترداد = $\frac{٢}{٣}$.

أوجد أيضا مقدار طاقة الحركة الضائعة بالتصادم .

(٤) برهن على أنه لا يضيع شئ من طاقة الحركة عند تصادم كرتين تامتي المرونة .

(٥) أوجد مقدار ما يضيع من طاقة الحركة عند تصادم كرتين كتلتاهما ك ، كَ متحركتين فى اتجاه واحد بسرعتى ع ، عَ بفرض أنهما لا مرونة لهما .

(٦) برهن على أن شيئا من طاقة الحركة يضيع عند تصادم كرتين مرنتين متحركتين فى مستقيم واحد .

(٧) معامل الاسترداد بين كرتين كتلتاهما ٢٥ جراما ، ١٢٥ جراما هو $\frac{٣}{٤}$ فاذا كانت الكبرى ساكنة وصادمتها الصغرى بسرعة ٤٥ سنتيمترا فى الثانية فاوجد سرعتيهما بعد التصادم . أوجد أيضا مقدار طاقة الحركة الضائعة بالتصادم .

(٨) كرتان تامتا المرونة صدمت إحداهما الأخرى وهى ساكنة فما نسبة كتلتيهما اذا فقدت الأولى $\frac{١}{ن}$ من سرعتها بالتصادم ؟

(٩) سقطت كرة من ارتفاع ١٦ قدما على حجر فنبت أول مرة مرتفعة ٩ أقدام .
أوجد معامل الاسترداد مهملا مقاومة الهواء .
أوجد أيضا المسافة الكلية التى تقطعها الكرة قبل أن تسكن .

(١٠) سقطت كرة بتأثير التثاقل من ارتفاع قدره هـ فنبت من مستوٍ أفقى مرتفعة مسافة ل . أوجد معامل الاسترداد بدلالة هـ ، ل .

(١١) سقطت كرة الى الأرض فنبت . فاذا كان معامل الاسترداد هو $\frac{١}{٢}$ فاوجد مقدار ما تفقده الكرة من طاقة حركتها و بين ما تحوّل اليه هذه الطاقة المفقودة .

(١٢) صدمت الكرة ا الكرة ب وكانت ا متحركة ، ب ساكنة فسكنت ا بعد التصادم . فاذا كان معامل الاسترداد = ى فأثبت :

(أولا) أن كتلة ا = ى × كتلة ب

(ثانيا) أن سرعة ب بعد التصادم = ى × سرعة ا قبله .

الباب الحادى عشر

الالات

بند ١١٩ — تعريف الآلة .

الآلة عبارة عن جهاز يستعمل لنقل الطاقة من نقطة الى أخرى .

ويتبين معنى هذا بالتأمل فى إحدى الآلات البخارية الكثيرة الاستعمال . فالبخار الداخل فى أسطوانة الآلة له طاقة لميله الى التمدّد . ويصرف جزء من هذه الطاقة فى إحداث شغل ينشأ منه تحريك المكبس . وبذلك تنتقل طاقة البخار الى المكبس ويمكن بجهاز خاص نقلها الى نقطة أخرى .

ففى الآلة البخارية المستعملة فى المناجم تنقل الطاقة الى حبل به يصرف الشغل فى رفع الفحم على رغم قوة التثاقل من قعر المنجم الى سطحه . فالآلة البخارية جهاز تُمَدُّ إحدى نقطه بمقدار من الطاقة التى تستخدم فى إحداث شغل عند نقطة أخرى .

ويظهر فى جميع الآلات فقد بعض الطاقة التى تمدّ بها الآلة عند نقلها . فيُحصَلُ من الآلة على طاقة أقل مما أمدت به . وهذا الفقد الظاهرى ينشأ من الشغل المصروف فى التغلب على الاحتكاك بين الأجزاء المختلفة من الآلة . فهذا الشغل يعقبه دائما ظهور حرارة وهى إحدى صور الطاقة . وقد وجد بالتجربة أن كل مقدار مخصوص من الشغل يعقبه مقدار مخصوص من الحرارة . وأن الطاقة التى يظهر فقدها فى الآلة يكافئها مقدار الحرارة الناشئ . ومع ذلك نقول إن الشغل الذى يصرف فى التغلب على الاحتكاك مفقود لأنه يتحول الى صورة لايمكن استخدامها فى عمل نافع .

الوابور البخارى آلة أكثر تركبا من أى آلة نتكلم عليها فى هذا الباب . إذ الآلات التى نبحث فيها هنا ذات تركيب بسيط . وسنفرض أنها تعمل بدون احتكاك مالم نذكر عكس ذلك . وتستعمل الآلة فى جميع الأحوال كما يأتى :

تؤثر فى إحدى نقطها مقاومة . وهى عادة ثقل يلزم رفعه برغم قوة التثاقل بقوة ثابتة تؤثر فى نقطة أخرى من الآلة . والمقاومة اللازم التغلب عليها تسمى غالبا بالثقل

أو المقاومة . والقوة اللازمة للتغلب على المقاومة تسمى بالقوة المحركة أو القوة . والمسألة العامة فى الآلات هى إيجاد العلاقة بين القوة والمقاومة وتحل بتطبيق قواعد الاستاتيكا . فاذا رمزنا بالرمز و الى المقاومة وبالرمز ق الى القوة نجد من الاستاتيكا مقدار ق الذى يجب أن يؤثر فى نقطة معينة من الآلة حتى يوازن قوة أخرى معينة هى و التى تؤثر فى نقطة أخرى من الآلة . وتسكن الآلة بتأثير القوتين ق ، و . وللتغلب على قصورها حتى تأخذ فى التحرك يضاف الى ق قوة صغيرة . ومن المعتاد فى الديناميكا النظرية أن يفرض أن ق تكفى لتحريك الآلة . فهى تحدث شغلا فيها بانتقال نقطة تأثيرها مسافة معينة . وتصرف الآلة هذا الشغل فى تحريك و مسافة معينة .

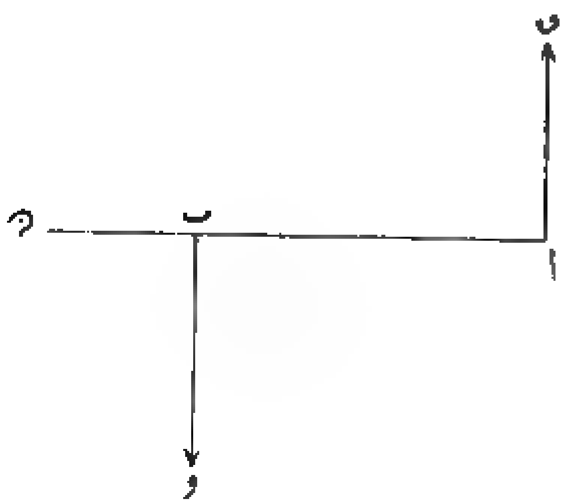
الفائدة الآلية (الميكانيكية) لآلة عبارة عن نسبة المقاومة الى القوة المحركة وتمثل حينئذ بالكسر $\frac{و}{ق}$

بند ١٢٠ — الرافعة .

الشكل الذى يصح أن يتخذ نموذجا للرافعة هو قضيب مستقيم يتحرك بلا عائق فى مستوٍ حول نقطة ثابتة تسمى نقطة الارتكاز . وتقسم الروافع على العموم على حسب وضع القوة والمقاومة بالنسبة لنقطة الارتكاز .

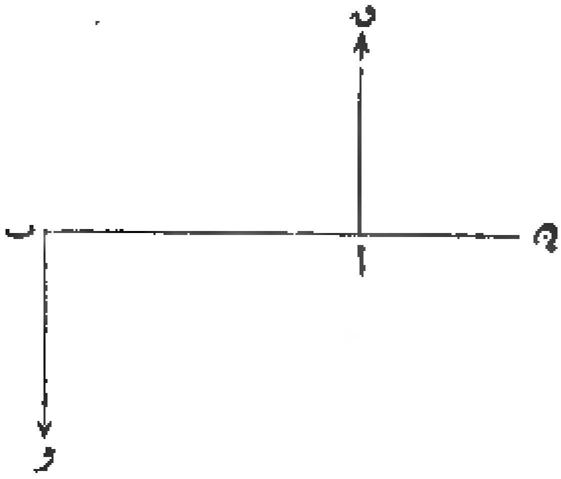


(النوع الأول) فيه نقطة الارتكاز بين القوة والمقاومة وفى هذا الشكل رافعة منه فترى حـ نقطة الارتكاز بين ا ، ب نقطتى تأثير القوة والمقاومة ومن أمثلته "الشادوف" والمقص مثال لرافعة مزدوجة منه .



(النوع الثانى) فيه المقاومة بين القوة ونقطة الارتكاز ومن أمثلته العتلة التى يثبت أحد طرفيها فى الأرض اذا أريد رفع ثقل أو تحريكه على سطح الأرض ومن أمثلته أيضا كاسرة البندق وهى رافعة مزدوجة .

(النوع الثالث) فيه القوة بين المقاومة ونقطة الارتكاز . فاذا رفع ثقل فى اليد فان الساعد يكون بمثابة رافعة منه فنقطة لارتكاز هى المرفق والمقاومة هى الثقل الذى باليد والقوة هى الشد فى الأنسجة الواصلة بين الساعد وعضلة العضد . ومن أمثلته أيضا الملقط . وهو رافعة مزدوجة .



بند ١٢١ — __الفائدة الآلية (الميكانيكية) للرافعة .__

لكون الرافعة لا تتحرك إلا بالدوران حول نقطة الارتكاز نرى أن شرط توازن القوة والمقاومة هو أن عزم الأولى بالنسبة الى نقطة الارتكاز يساوى ويضاد عزم الثانية بالنسبة اليها . وقد فرض فى الأشكال التى بالبند السابق أن كلا من القوة والمقاومة تؤثر فى اتجاه عمودى على الرافعة . ولكن مهما كان اتجاهاهما فاننا لو رمزنا بالرمز ق الى القوة وبالرمز و الى المقاومة وبالرمزين ا ، ب الى بعديهما عن نقطة الارتكاز ينتج بمقتضى نظرية العزوم أن .

و × ب = ق × ا

ومنه و/ق = ا/ب

وفى النوع الأول من الروافع ا إما أكبر من ب وإما مساوية لها وإما أصغر منها فالكسر و/ق قد يكون أكبر من الواحد وقد لايكون .

فنرى أنه قد يكون فى النوع الأول فائدة آلية (ميكانيكية) وقد لايكون .

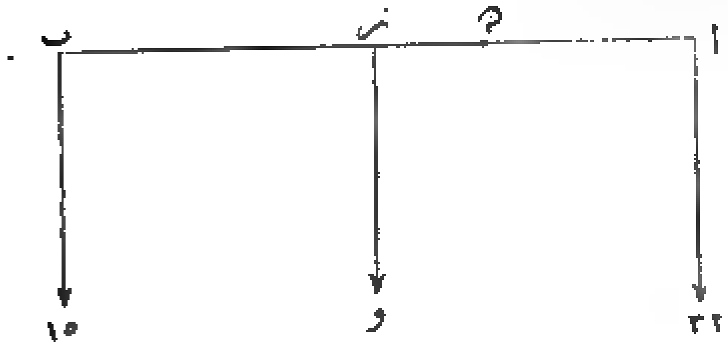
وفى النوع الثانى ا أكبر من ب فالكسر و/ق أكبر من الواحد فلا بد من فائدة آلية (ميكانيكية) .

وفى النوع الثالث ا أقل من ب فالكسر و/ق أقل من الواحد . أى لافائدة آلية (ميكانيكية) .

ويلاحظ الطالب أننا أهملنا ثقل الرافعة أثناء ايجاد العلاقة بين القوة والمقاومة فان لم يمكن إهمال ثقل الرافعة فان العلاقة بين القوة والمقاومة توجد بالقانون الآتى وهو أن المجموع الجبرى لعزوم ثقل الرافعة والقوة والمقاومة بالنسبة الى نقطة الارتكاز يساوى صفرا .

(مثال) تتزن رافعة منتظمة فى نقطة على بعد يساوى $\frac{1}{3}$ طولها من أحد طرفيها اذا علق به ٣٢ باوندا وعلق بالطرف الآخر ١٥ باوندا . فما ثقل الرافعة ؟ .

لتكن ا د ز ب الرافعة ، د نقطة ارتكازها .



ا د = $\frac{1}{3}$ ا ب ، د ب = $\frac{2}{3}$ ا ب ومن حيث إن القضيب منتظم يكون مركز ثقل الرافعة فى النقطة ز منتصف ا ب فيكون د ز = ا ز − ا د = $\frac{1}{2}$ ا ب − $\frac{1}{3}$ ا ب = $\frac{1}{6}$ ا ب

فاذا رمزنا بالرمز و الى ثقل الرافعة ينتج من نظرية العزوم أن المجموع الجبرى لعزوم القوة ٣٢ المؤثرة فى ا والقوة ١٥ المؤثرة فى ب والقوة و المؤثرة فى ز يساوى صفرا فينتج أن

و × د ز + ١٥ × د ب = ٣٢ × د ا

أو و × $\frac{1}{6}$ ا ب + ١٥ × $\frac{2}{3}$ ا ب = ٣٢ × $\frac{1}{3}$ ا ب

وبالقسمة على ا ب وحذف الكسور ينتج أن

و + ٦٠ = ٦٤

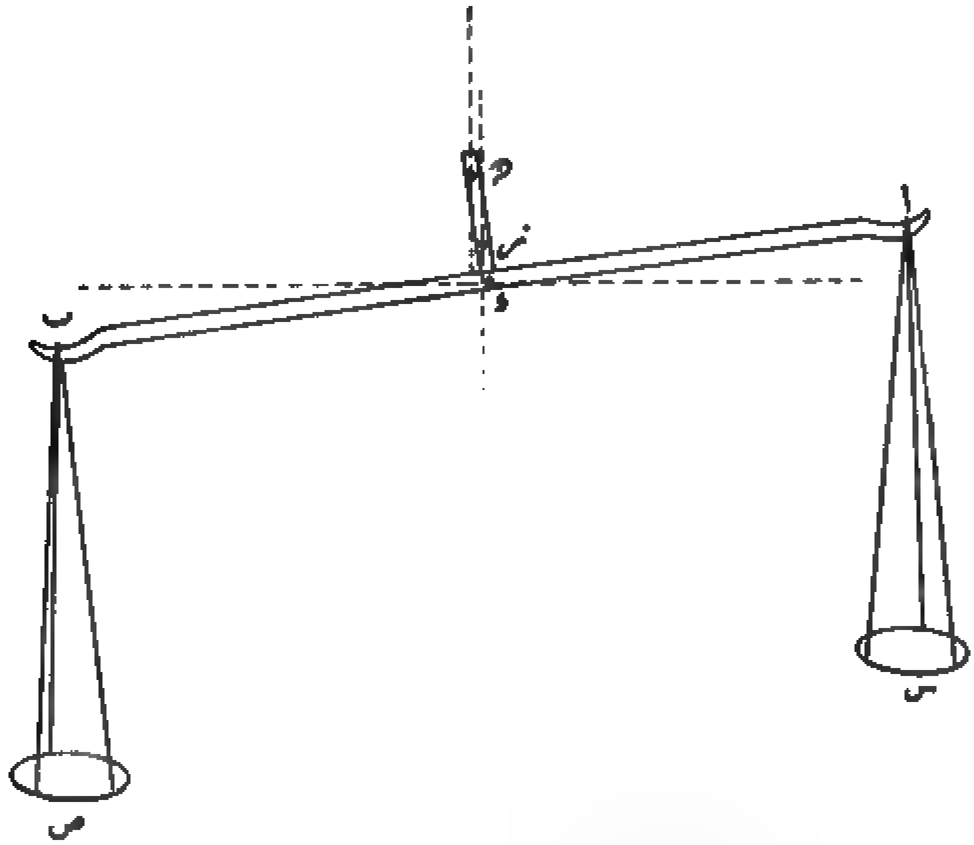
ومنه و = ٤ باوندات

بند ١٢٢ — الميزان المعتاد .

يتركب الميزان المعتاد من عاتق قد عُلق من طرفيه كفتان متماثلتان هما س ، ص . ويعلق العاتق من النقطة د وتقع على المستقيم الذى ينصف ا ب عمودا عليه وتقع ز مركز ثقل العاتق على ذلك المستقيم أيضا .

ولوزن جسم نضعه فى إحدى الكفتين ونضع فى الأخرى صَنْجات حتى يصير العاتق فى وضع أفقى . واعلم أننا نقدّر بمثل هذا الميزان كل الأجسام لا أثقالها لأنه إذا وضع جسم معين فى إحدى الكفتين لزم لموازنته صَنْجات معينة فى أى مكان من سطح الأرض إذ التغير فى قوة التثاقل يتساوى تأثيراه فى الجسم والصَّنجات .

فاذا وجدنا أن وزن جسم بهـذا الميزان يعادل وزن ٥ كيلوجرامات قلنا أن كتلتـه ٥ كيلوجرامات وليس ثقله ٥ كيلوجرامات . لأن الثقل مقدار غير ثابت .



بند ١٢٣ — شروط الميزان .

(أولا) يجب أن يكون الميزان مضبوطا أى أن يكون عاتقه أفقيا اذا علق من طرفيه كتلتان متساويتان . وذلك بجعل الكفتين متماثلتين تمام التماثل هيئة وثقلا. وكذا بجعل الذراعين متساويتين .

الميزان غير المضبوط — اذا كانت ذراعا العاتق غير متساويتى الطول فان الميزان يكون غير مضبوط فلا يعرف منه مقدار كتلة الجسم بالضبط .

ولكن بالوزن المزدوج يمكن ذلك . فيوضع الجسم المراد وزنه فى احدى الكفتين وشئ من الرمل الدقيق فى الأخرى الى أن يحدث توازن مضبوط . ثم يرفع الجسم

من الكفة وتستعاض عنه صنجات توازن الرمل . فمن الواضح أنه سواء كان الميزان مضبوطا أم غير مضبوط تكون كتلة الجسم مساوية بالضبط كتلة الصنجات التى وضعت لتحدث التوازن .

وهناك طريقة أخرى لمعرفة كتلة جسم بالضبط بميزان ذراعاه غير متساويتين نشرحها فيما يأتى : نضع الجسم فى احدى الكفتين وفى الأخرى صنجات توازنه ثم نرفعه والصنجات ونضعه فى الكفة التى كانت هذه بها . وأمامه فى الكفة الأخرى بعض صنجات توازنه فمن الواضح أن التقديرين مختلفان .

نرمز فى الشكل الذى بالبند السابق بالرمزين ا‾ ، ب‾ الى طولى جزأى العاتق ء ا ، ء ب وبالرمز $و_1$ الى الوزن الظاهرى عندما يوزن الجسم فى الكفة س وبالرمز $و_2$ الى الوزن الظاهرى عند ما يوزن فى الكفة ص وبالرمز و الى الوزن الحقيقى . فمن نظرية العزوم ينتج أن عزم و المؤثرة فى ا بالنسبة الى نقطة الارتكاز يساوى ويضاد عزم $و_1$ المؤثرة فى ب فيكون

$$\text{و}\ \bar{\text{ا}} = \text{و}_1\ \bar{\text{ب}}$$

وكذا

$$\text{و}\ \bar{\text{ب}} = \text{و}_2\ \bar{\text{ا}}$$

وبضرب المعادلتين إحداهما فى الأخرى يحدث أن

$$\text{و}^2\ \bar{\text{ا}}\ \bar{\text{ب}} = \text{و}_1\ \text{و}_2\ \bar{\text{ا}}\ \bar{\text{ب}}$$

وبالقسمة على ا‾ ب‾ ثم أخذ الجذر التربيعى ينتج أن

$$\text{و} = \sqrt{\text{و}_1\ \text{و}_2}$$

فالوزن الحقيقى مساوٍ الوسط المتناسب بين الوزنين الظاهريين للجسم اذا وزن فى الكفتين .

ولايجاد النسبة بين الذراعين بدلالة $و_1$ ، $و_2$ نقسم المعادلة الأولى على الثانية فيحدث أن

$$\frac{\bar{\text{ا}}}{\bar{\text{ب}}} = \frac{\text{و}_1\ \bar{\text{ب}}}{\text{و}_2\ \bar{\text{ا}}}$$

أو

$$\left(\frac{\bar{\text{ا}}}{\bar{\text{ب}}}\right)^2 = \frac{\text{و}_1}{\text{و}_2}$$

ومنه $\frac{أ}{ب} = \sqrt{\frac{و_1}{و_2}}$

(ثانيا) يجب أن يكون الميزان حساسا فاذا اختلفت الكتلتان ولو يسيرا يكون انحراف العاتق من الوضع الأفقى جليا . وهذا يكون بتطويل الذراعين وجعل حـ ء قصيرا .

(ثالثا) يجب أن يكون توازن الميزان ثابتا فاذا اضطرب عاتقه فانه يعود الى وضعه الأفقى سريعا وهذا يكون بتقصير الذراعين وتطويل حـ ء .

ويرى أن شرط الحساسية يناقض شرط ثبات التوازن فلا يمكن الجمع بين الشرطين .

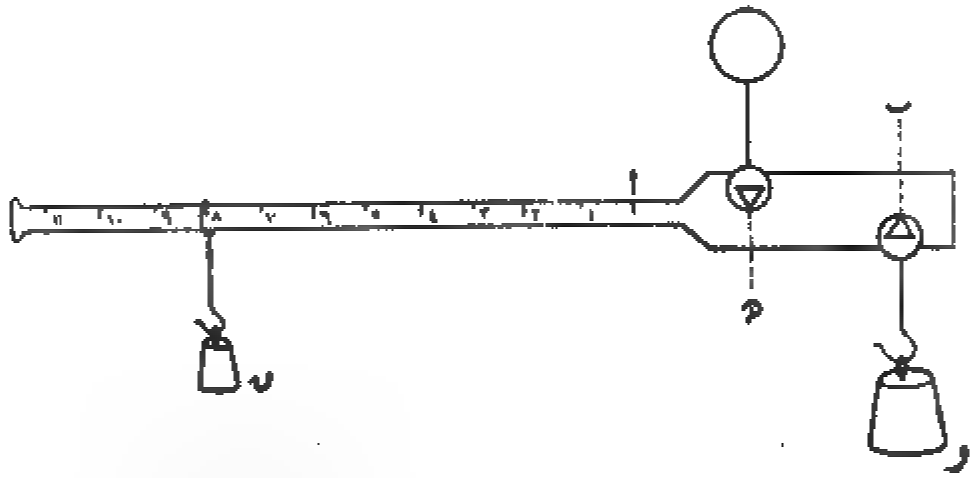
ويراعى عند صنع الميزان الغرض منه .

فالميزان الكيميائى يحتاج الى الحساسية أكثر من ثبات التوازن والميزان التجارى الذى يستعمله الباعة يحتاج الى ثبات التوازن أكثر من الحساسية .

بند ١٢٤ — القبان .

يتركب هذا الميزان من عاتق نقطة ارتكازه حـ وثقل إحدى ذراعيه أعظم من ثقل الأخرى .

ويعلق من ب إحدى نقط الذراع القصيرة خطاف لحمل الجسم المراد تعيين كتلته أما الذراع الطويلة فمدرجة وتزلق على طولها حلقة تحمل صنجة تسمى "رمانة" .



ولتعيين كتلة جسم بهذا الميزان يعلق فى الخطاف ثم تحرك الرمانة على طول الذراع الطويلة حتى يصير الميزان أفقيا . فالعدد المرقوم إزاء نقطة تعليق الرمانة يبين كتلة الجسم .

طريقة تدريج القبان — لتكن ا النقطة المرقوم إزائها صفر أى النقطة التى يجب ان تعلق منها ى اذا لم يعلق من الخطاف ثقل ما فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى المؤثرة فى القبان بالنسبة الى هـ يساوى صفرا .

اذا علقنا الآن الثقل و من الخطاف زاد العزم السالب مقـــدار و × $\overline{\text{ب د}}$.

وللتوازن تحرك ى مسافة س فيزيد العزم الموجب بمقدار ى × س

∴ ى × س = و × $\overline{\text{ب د}}$

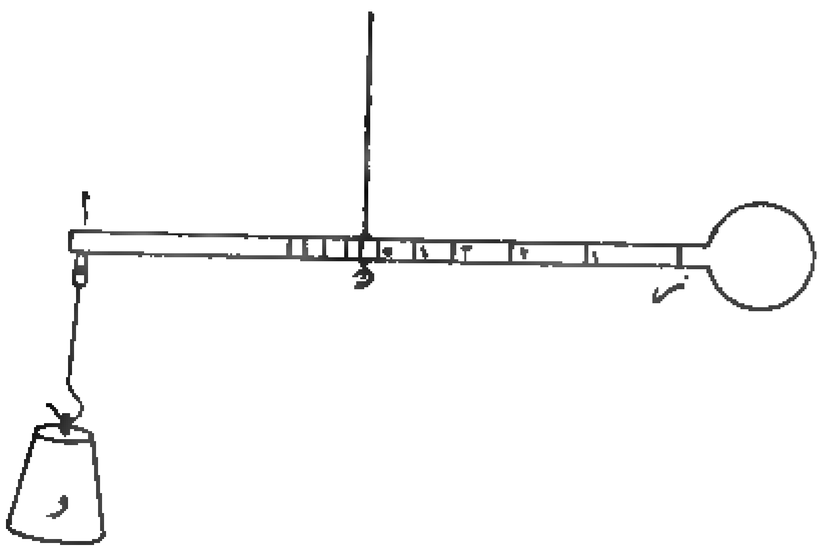
ومن حيث ان ى ثابتة ، ب د ثابت أيضا ينتج أن

س تتناسب طرديا مع و

ويتضح أن الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ الدالة على عدد الكيلوجرامات وهى المكتوبة على الذراع الطويلة متساوية الأبعاد .

بند ١٢٥ — الميزان الدانيماركى .

يتركب هـذا الميزان من ساق أحد طرفيها أثقل من الآخر . ولتعيين كتلة جسم به نعلقه فى الخطاف المعلق من ا .



أما الساق فتعلق بالحلقــة د التى يمكن تحريكها على طول الذراع حتى تتزن الساق وفى هذا الوضع يعين العدد المرقوم إزاء نقطة التعليق ثقل الجسم .

طريقة تدريج الميزان الدانيماركى — لتكن ﻧ مركز ثقل الميزان فمن حيث انه يجب تعليقه من ﻧ اذا لم يعلق من الخطاف شئ تكون ﻧ نقطة الصفر .

واذا فرضنا أنه يجب تعليقه من د عند مايعلق من الخطاف الثقل و وكان ثقل الميزان ں ينتج أن :

$$ں \times \overline{ﻧ د} = و \times \overline{ا د}$$

$$\therefore \quad ں \times (ا ﻧ - ا د) = و \times \overline{ا د}$$

$$\therefore \quad ا ﻧ \times ں = ا د (ں + و)$$

$$\therefore \quad ا د = ا ﻧ \times \frac{ں}{ں + و}$$

ولكون ا ﻧ ثابتا وكذا ں ينتج أن

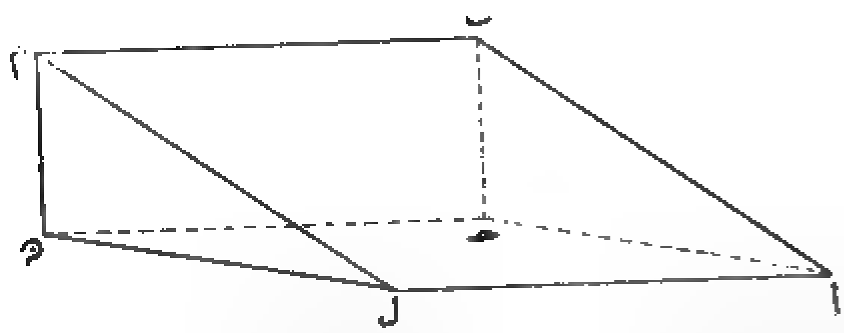
النقط المرقوم فيها ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... . الدالة على الكيلوجرامات هى على أبعاد من ا تناسب

$$\frac{ں}{ں} ، \frac{ں}{ں+١} ، \frac{ں}{ں+٢} ، \frac{ں}{ں+٣} \text{ الخ}$$

وهذه الحدود تكوّن متوالية توافقية .

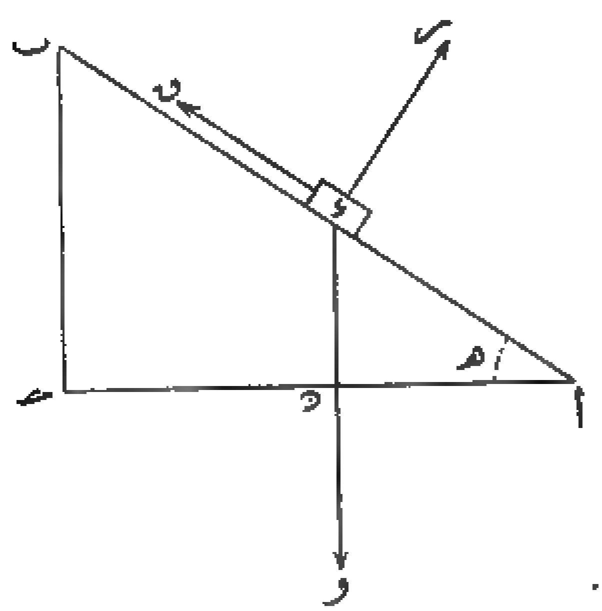
بند ١٢٦ — المستوى المائل الأملس .

ليكن ا ل م ب مستويا أملس مائلا على الأفق ا ل د حـ ويراد ايجاد القوة ں التى يجب أن تؤثر فى اتجاه معين فى مستوٍ عمودى على ا ل لتوازن ثقلا معينا هو و على ذلك المستوى .



(أولا) نفرض أن القوة تؤثر على طول المستوى المائل كما فى الشكل (١) الذى يمثل مقطعا منه عموديا على خط تقاطعه مع الأفق . ففى هذه الحالة يكون الجسم ى فى حالة التوازن بتأثير ثلاث قوى وهى :

(١) الثقل و الرأسى الى أسـفل . (٢) القوة ق على طول المستوى المائل .
(٣) ردّ فعل المستوى ر فى اتجاه عمودى على المستوى .



(شـكل ١)

فمن حيث إن ء فى حالة توازن يكون مجموع مركبات جميع القوى فى المستوى يساوى صـفرا . ثم ان مركبة و فى المستوى الى أسفل هى و جتا أ ء د ، و جا ء أ د ، و جا هـ بفرض أن هـ زاوية ميل المستوى على الأفق . فيكون :

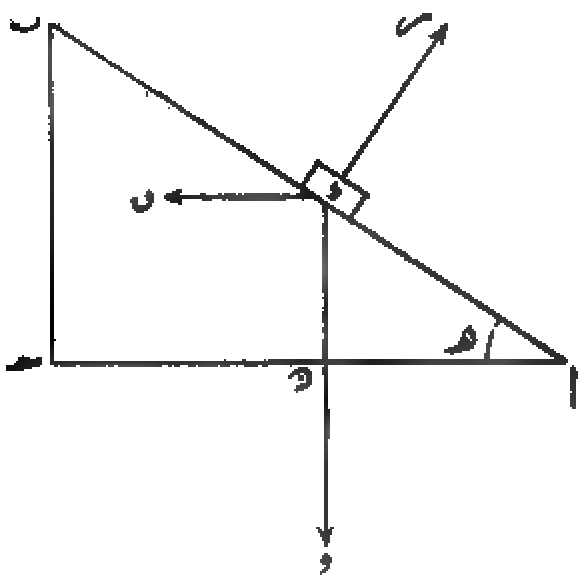
ق — و جا هـ = صفرا أو ق = و جا هـ

وكذا يكون مجموع المركبات فى الاتجاه العمودى على المستوى يساوى صفرا .

ومن حيث ان مركبة و فى الاتجاه العمودى على المستوى تساوى و جتا هـ فهذا المقدار لابدّ أن يساوى ر فيكون

ر = وجتا هـ

(ثانيا) نفـرض أن القوة تؤثر فى اتجاه أفقى كما فى شكل (٢) فبالتحليل فى اتجـاه المسـتوى وفى الاتجاه العمودى عليـه ثم بالتعبير عن أن كلا من المجموعين الجبريين للمركبات فى اتجاه المسـتوى وفى الاتجـاه العمودى عليـه يساوى صـفرا نسـتنتج المعادلتين الآتيتين :



(شـكل ٢)

ق جتا هـ — و جا هـ = صفرا ... ... (١)

ق جا هـ + و جتا هـ — ر = صفرا ... ... (٢)

فمن المعادلة (١) ينتج أن

$$\text{ق} = \text{و} \frac{\text{جا ه}}{\text{جتا ه}} = \text{و ظا ه}$$

ومنه نعرف قيمة ق بدلالة و

ومن المعادلة (٢) ينتج أن

$$\text{ر} = \text{ق جا ه} + \text{و جتا ه}$$

$$= \text{و ظا ه جا ه} + \text{و جتا ه}$$

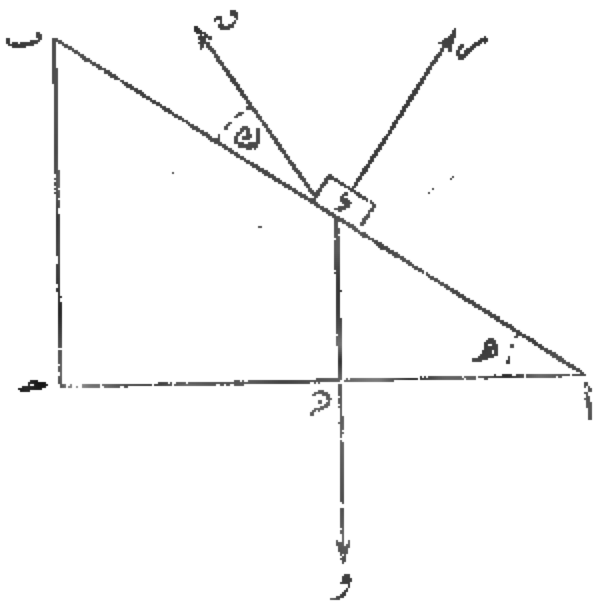
$$= \text{و} \left(\frac{\text{جا}^{2}\text{ه}}{\text{جتا ه}} + \text{جتا ه} \right)$$

$$= \text{و} \frac{\text{جا}^{2}\text{ه} + \text{جتا}^{2}\text{ه}}{\text{جتا ه}}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{جتا ه}}$$

وهذا يدلنا على قيمة ر بدلالة و

(ثالثا) نفرض أن القوة تؤثر فى اتجاه يصنع مع المستوى المـائل زاوية قدرها ك كما فى شكل (٣)



(شـــكل ٣)

نعبر عن أن كلا من المجموعين الجبريين للركبات فى اتجاه المستوى المائل وفى الاتجاه العمودى عليه يساوى صفرا فنحصل على المعادلتين

ق جتا ك − و جا هـ = صفرا .... (١)

ر + ق جا ك − و جتا هـ = صفرا .... (٢)

فمن (١) نجد أن

$$\text{ق} = \frac{\text{و جا هـ}}{\text{جتا ك}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(٣)}$$

ومن (٢) نجد أن

$$\text{ر} = \text{و جتا هـ} - \text{ق جا ك}$$

$$= \text{و جتا هـ} - \frac{\text{و جا ك جا هـ}}{\text{جتا ك}}$$

$$= \text{و} \frac{\text{جتا هـ جتا ك} - \text{جا ك جا هـ}}{\text{جتا ك}}$$

$$= \text{و} \frac{\text{جتا (هـ + ك)}}{\text{جتا ك}}$$

(مثال) مستو مائل يبلغ ارتفاعه ٣ أقدام عن كل ٥ أقدام من طوله . أوجد مقدار القوة اللازمة لتوازن ثقل قدره ١٠٠ باوند (أولا) اذا كان اتجاه تأثير القوة أفقيا (ثانيا) اذا كان اتجاه تأثيرها يوازى المستوى

اذا كان فى شكل (٢) أو شكل (٣) ا ب = ٥ أقدام يكون ب حـ = ٣ أقدام فيكون

جا ب ا حـ أو جا هـ هو $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا ب}}$ أو $\frac{٣}{٥}$ وأيضا ظا هـ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}$ أو $\frac{٣}{\sqrt{٢٥ - ١٦}}$

أى أن ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

(أولا) فاذا كان اتجاه تأثير القوة أفقيا يكون

ق = و ظا هـ

وفى هذه الحالة ق = ١٠٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ٧٥ باوندا

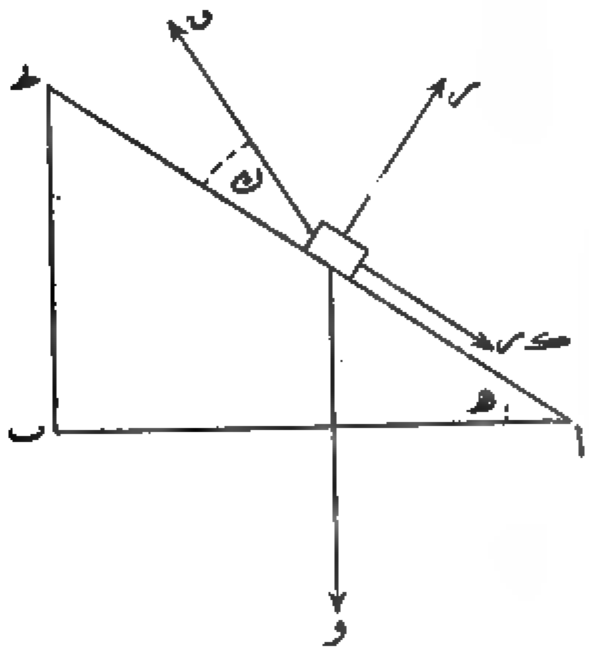
(ثانيا) واذا كان اتجاه تأثير القوة يوازى المستوى يكون

ق = و جا هـ

وفى هذه الحالة ق = ١٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٦٠ باوندا

بند ١٢٧ – المستوى المائل الخشن .

وضع جسم على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية قدرها هـ . وكان معامل الاحتكاك بينهما ڪ وقد أثرت فى الجسم القوة ق فى اتجاه يصنع مع المستوى المائل زاوية قدرها ك . ويراد ايجاد العلاقة بين ق وثقل الجسم و عند ما توشك ق أن تزلقه على المستوى الى أعلى .



ان القوى المؤثرة فى الجسم . وهى ق والثقل و الى أسفل ورد فعل المستوى ر والاحتكاك ڪ ر على المستوى الى اسفل تكون متوازنة عند ما يوشك أن تزلق . فيجب أن يكون كل من مجموعى المركبات فى اتجاه المستوى وفى الاتجاه العمودى عليه يساوى صفرا فينتج أن

ق جتا ك – ڪ ر – و جا هـ = صفرا ... ... (١)

ر + ق جا ك – و جتا هـ = صفرا ... ... (٢)

فبضرب المعادلة (٢) فى ڪ ثم اضافتها الى المعادلة (١) يحدث أن

ق (جتا ك + ڪ جا ك) – و (جا هـ + ڪ جتا هـ) = صفراً

$$\text{ومنه ق} = \frac{\text{و(جا هـ + ڪ جتا هـ)}}{\text{جتا ك + ڪ جا ك}}$$

وباستعاضة هذه القيمة فى المعادلة (٢) يسهل على الطالب إثبات أن

$$\text{ر} = \frac{\text{و(جتا هـ جتا ك – جا هـ جا ك)}}{\text{جتا ك + ڪ جا ك}} = \frac{\text{و جتا(هـ + ك)}}{\text{جتا ك + ڪ جا ك}}$$

ولإيجاد أصغر قوة تسحب الجسم على المستوى الى أعلى تستخرج قيمة ك التى تجعل الكسر $\frac{\text{و(جا هـ + ڪ جتا هـ)}}{\text{جتا ك + ڪ جا ك}}$ أصغر ما يمكن

وهذا الكسر يكون أصغر مايمكن عند مايكون مقامه أكبر مايمكن . فاذا كانت م زاوية الاحتكاك يكون ظا م = ك . فيكون مقام الكسر مساويا

$$\text{جتا ك} + \text{ظا م جا ك} = \text{جتا ك} + \frac{\text{جا ك جا م}}{\text{جتا م}}$$

$$= \frac{\text{جتا ك جتا م} + \text{جا ك جا م}}{\text{جتا م}} = \frac{\text{جتا (ك} - \text{م)}}{\text{جتا م}}$$

فالمقام يكون أكبر مايمكن عند ما يكون $\frac{\text{جتا (ك} - \text{م)}}{\text{جتا م}}$ أكبر مايمكن .

ومن حيث إن م زاوية ثابتة فهذا الكسر الأخير أكبر مايمكن عند مايكون بسطه أكبر مايمكن أى عند مايكون جتا (ك — م) أكبر مايمكن . ومن حيث إن جيب تمام الزاوية يكون أكبر مايمكن عند ماتكون الزاوية صفرا ينتج أن الكسر $\frac{\text{جتا (ك} - \text{م)}}{\text{جتا م}}$ يكون أكبر مايمكن اذا ساوت ك — م صفرا . أى اذا كانت ك = م . فقيمة الكسر اذ ذاك هى $\frac{1}{\text{جتا م}}$. فالقوة اللازمة لسحب جسم على مستوٍ مائل الى أعلى أصغر مايمكن اذا صنع اتجاه القوة مع المستوى المائل زاوية تساوى زاوية الاحتكاك . وبمقتضى مامرّ نرى أن مقدار هذه القوة بدلالة و ، هـ ، م هو

$$\frac{\text{و (جا هـ} + \text{ظا م جتا هـ)}}{\frac{1}{\text{جتا م}}}$$

$$= \text{و (جا هـ جتا م} + \text{جا م جتا هـ)}$$

$$= \text{و جا (م} + \text{هـ)}$$

واذا جعلنا هـ = صفرا تؤول المسألة الى الحالة التى فيها يسحب الجسم على مستوٍ أفق . ويحصل على مقدار أصغر قوة لسحب الجسم على المستوى بجعل هـ = صفرا فى المقدار الذى سبق إيجاده . فأصغر قوة هى و جا م وتميل على الأفق بزاوية قدرها م

(مثال) أوجد أصغر قوة ضرورية لسحب جسم الى أعلى على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية قدرها ٣٠° وقارنها بأصغر قوة تلزم لسحب الجسم على مستوٍ أفق علما بأن معامل الاحتكاك فى الحالتين $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

الزاوية التى ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٣٠° فتكون م فى هذه الحالة ٣٠°. فلايجاد أصغر قوة ضرورية لسحب جسم الى أعلى على مستوٍ مائل نجعل م = ٣٠° ، هـ = ٣٠° فى القانون و × جا (م + هـ) . فاذا رمزنا الى القوة بالرمز $ق_١$ يكون

$$ق_١ = و جا (٣٠° + ٣٠°) = و جا ٦٠°$$

$$= و \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

ولإيجاد أصغر قوة ضرورية لسحب الجسم على مستوٍ أفقى نجعل هـ = صفرا ، م = ٣٠° فاذا رمزنا اليها بالرمز $ق_٢$ يكون

$$ق_٢ = و جا ٣٠$$

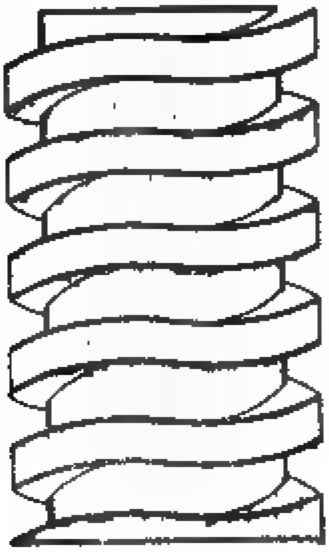
$$= \frac{و}{٢}$$

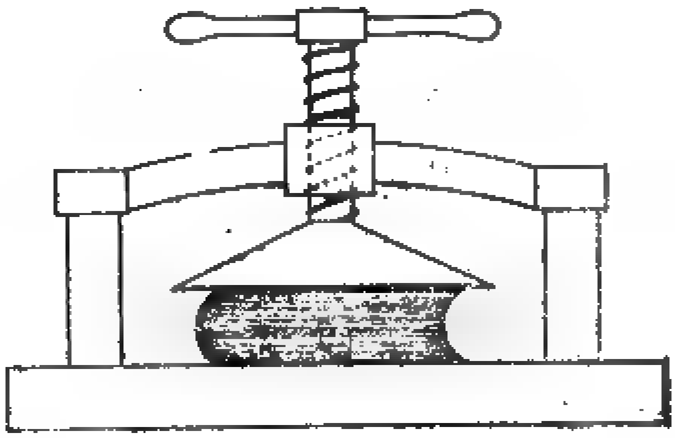
فنجد أن $ق_١ : ق_٢ = و \frac{\sqrt{٣}}{٢} : \frac{و}{٢}$

$$= \sqrt{٣} : ١$$

بند ١٢٨ — اللــــولب .

الشكل المعتاد لهذه الآلة عبارة عن مسمار محوى يمر فى "صامولة" مثبتة قد خُطَّ بسطحها الداخلى حز ينطبق على شريط اللولب انطباقا تاما . ويحرك اللولب بقوة توقع





فى نهاية ذراع متصلة بأحد طرفيه . فعند ادارة الذراع بهذه القوة يمر اللولب فى "الصامولة" محدثا فى الطرف الآخر ضغطا يمكن استخدامه فى التغلب على مقاومة تسمى عادة بالقوة المقاومة .

ومن الأمثلة المألوفة لاستعمال اللولب المطبعة الكابسة المعتادة فان القوة المقاومة هى التى يقاوم بها الكتاب الضغط . وفى ملزم الحداد يستعمل اللولب لتقريب الفكين احدهما من الآخر . وفى كثير من الآلات البخارية يكون جزءا من الجهاز المعد لضغط الصاذات للعجلات .

درجة اللولب هى المسافة بين أى جزأين متتاليين من الشريط مقيسة فى اتجاه محور اللولب . فاذا دارت ذراع اللولب دورة كاملة فانه يتحرك مسافة مساوية لدرجته وترتبط العلاقة بين القوة ق والمقاومة و بطول الذراع والدرجة . وسنوجد العلاقة بين ق ، و بنظرية بقاء الطاقة . ونعتبر أن القوة تؤثر فى اتجاه عمودى على الذراع .

لتكن ا درجة اللولب ، ب طول ذراعه . فاذا دارت الذراع دورة كاملة تنتقل نقطة تأثير القوة مسافة مساوية محيط دائرة نصف قطرها ب أى مسافة قدرها ٢ ط ب فالشغل الذى تعمله القوة فى اللولب أثناء دورة واحدة مساو ٢ ط ب ق ومن حيث إن اللولب يتحرك مسافة تساوى طول درجته اذا أديرت ذراعه دورة كاملة ينتج أن الشغل الذى يعمله يساوى و × ا وبمقتضى نظرية بقاء الطاقة يكون الشغل المبذول فى اللولب مساويا الشغل الذى يعمله هو فينتج أن .

$$و \times ا = ٢ ط ب ق$$

ومنه $$\frac{و}{ق} = \frac{٢ ط ب}{ا}$$

(مثال) المطلوب إحداث ضغط قدره ٨٠٠ باوند بلولب يدور شريطه دورتين فى مسافة ثلاث بوصات علما بأن طول الذراع يساوى قدمين . ما مقدار القوة اللازمة لذلك ؟

درجة اللولب = $\frac{٣}{٢}$ من البوصات أى $\frac{١}{٨}$ قدم وطول ذراعه قدمان . فيكون :

$$ا = \frac{١}{٨} ، ب = ٢ ، و = ٨٠٠$$

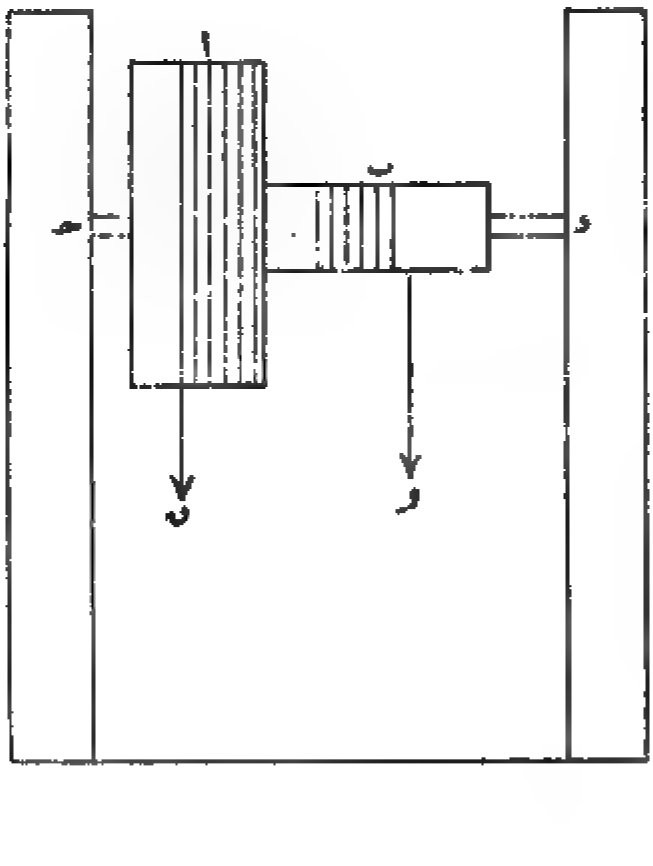
فباستعاضة هذه القيم فى المعادلة السابقة واعتبار ط = $\frac{٢٢}{٧}$ يحدث أن :

$$\frac{٨٠٠}{ق} = \frac{٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢}{\frac{١}{٨}}$$

ومنـــه ق = ٨ باوندات تقريبا .

بند ١٢٩ – الملف .

تتركب هذه الآلة من الأسطوانتين ا ، ب وقد ثُبتت احداهما فى الأخرى بحيث تدوران حول محور واحد هو حـ ء . ثم ان قطر ا المسماة بالدارة أطول كثيرا من قطر ب المسماة بالأسطوانة . ويلف حبلان حول الأسطوانتين فى اتجاهين متضادين حتى اذا حركت الآلة صعد أحدهما وهبط الآخر . وتؤثر القوة المحركة فى طرف الحبل الذى حول الدارة . والقوة المقاومة فى طرف الآخر . وقد تؤثر القوة المحركة باستعمال مقبض كما فى رافعة الأثقال (الونش) .



لتكن و رمزا الى الثقل المقاوم المثبت فى نهاية الحبل الذى حول أسطوانة الملف فالمطلوب ايجاد القوة ق التى يجب أن تؤثر تأثيرا رأسيا الى أسفل فى نهاية الحبل الآخر حتى توازن و

نرى أن الآلة تؤثر فيها قوتان فقط وهما و ، ق وتتجه كل منهما اتجاها رأسيا الى أسفل فللتوازن يجب أن يكون مجموع عزميهما حول المحور صفرا . فلو رمزنا بالرمزين آ ، بَ الى نصفى قطرى الدارة والأسطوانة ينتج أن :

$$و \times بَ = ق \times آ$$

ومنـــه $\frac{و}{ق} = \frac{آ}{بَ}$

(مثال) اذا اتصل بحبل أسطوانة الملف ثقل قدره طن قد وُضع على مستوٍ أملس مائل على الأفق بزاوية ٣٠° . فأوجد القوة اللازمة لاتزانه عند ما يكون الحبل موازيا المستوى . علما بأن نصفى القطرين ٤ أقدام و ٩ بوصات .

القوة المؤثرة فى اتجاه يوازى المستوى وهى اللازمة لمنع ثقل قدره طن من الانحدار على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٣٠° هى بموجب بند ١٢٦

$$٢٢٤٠ \times \text{جا } ٣٠^\circ = ٢٢٤٠ \times \frac{١}{٢} = ١١٢٠ \text{ باوندا}$$

فهذا هو الشدّ فى الحبل المتصل باسطوانة الملف أى أن و = ١١٢٠ باوندا ثم ان أ = ٤ أقدام و ب = ٩ بوصات = $\frac{٣}{٤}$ القدم فيكون

$$\frac{١١٢٠}{ق} = \frac{٤}{\frac{٣}{٤}}$$

ومنه ق = ٢١٠ باوندات .

بند ١٣٠ — البكرات .

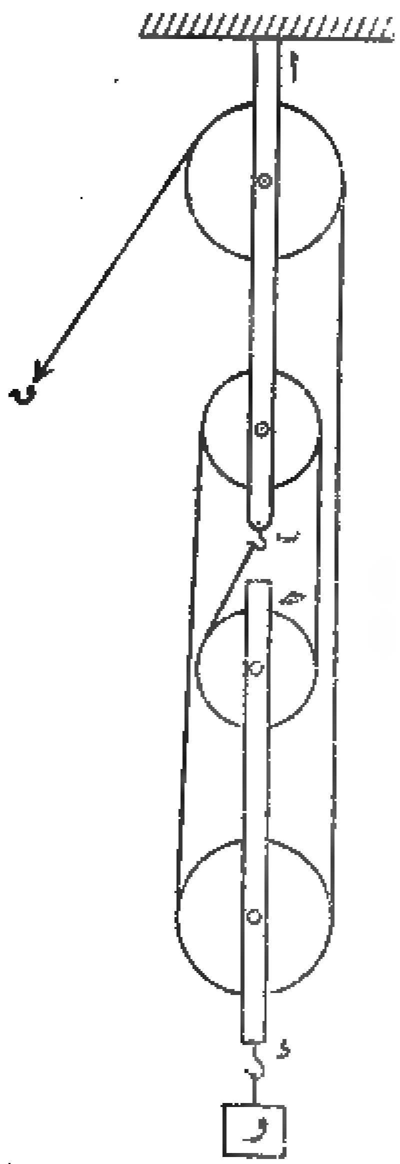
البكرة عبارة عن أسطوانة خشبية رفيعة يمكن إدارتها حول محور مارّ بمركزها . وقد خط على محيطها حز يمرّ عليه حبل . ونفرض أنه اذا مرّ حبل على بكرة يكون الشدّ فى جزأيه سواء أى أننا نهمل الاحتكاك ونعتبره تام اللين . فالشدّ إذن فى حبل مارّ على أى عدد من البكرات واحد فى جميع أجزائه .

وكثيرا ما تركب مجموعة من البكرات لرفع الأثقال وانا باحثون فى الفائدة الآلية (الميكانيكية) لمجموعتين منها .

(١) المجموعة التى فيها يمر خيط واحد حول جميع البكرات .

فى هذه المجموعة حاملان أعلاهما وهو أ ب ثابت والآخر وهو حـ ء قابل للتحرك وتثبت إحدى نهايتى الخيط فى الجزء السفلى ب من الحامل الثابت ثم يمر على أعلى بكرة من الحامل الأسفل . ثم على أسفل بكرة من الحامل الأعلى ثم على البكرة الثانية

في العلوّ من الحامل الأسفل وهكذا . ويعلق من الطرف الأسفل للحامل الأسفل الثقل و . فالمطلوب إيجاد مقدار القوة ق التي اذا أثرت في الطرف الخالص للخيط تكفي لاتزان و .



نرى في الشكل أن بكل حامل بكرتين فيكون الحامل الأسفل معلقا بأربعة خيوط يمكن اعتبارها (بدون خطأ يذكر) رأسية . والشدّ في كل منهما يساوي ق . فنرى أن و يوازنها ٤ قوى كل تساوي ق فيكون

و = ٤ ق

وكذا اذا كان عدد بكرات الحامل الأسفل د فان

و = ٢ د ق

واذا راعينا ثقل الحامل الأسفل والبكرات نجعل و تشمل ذلك الثقل . وقد توضع بكرات الحامل الأسفل بعضها بجانب بعض فتدور حول محور أفقي واحد . وكذا توضع بكرات الحامل الأعلى . ويسمى هذا التركيب بالعيار .

(٢) المجموعة التي فيها يمر على كل بكرة خيط خاص بها .

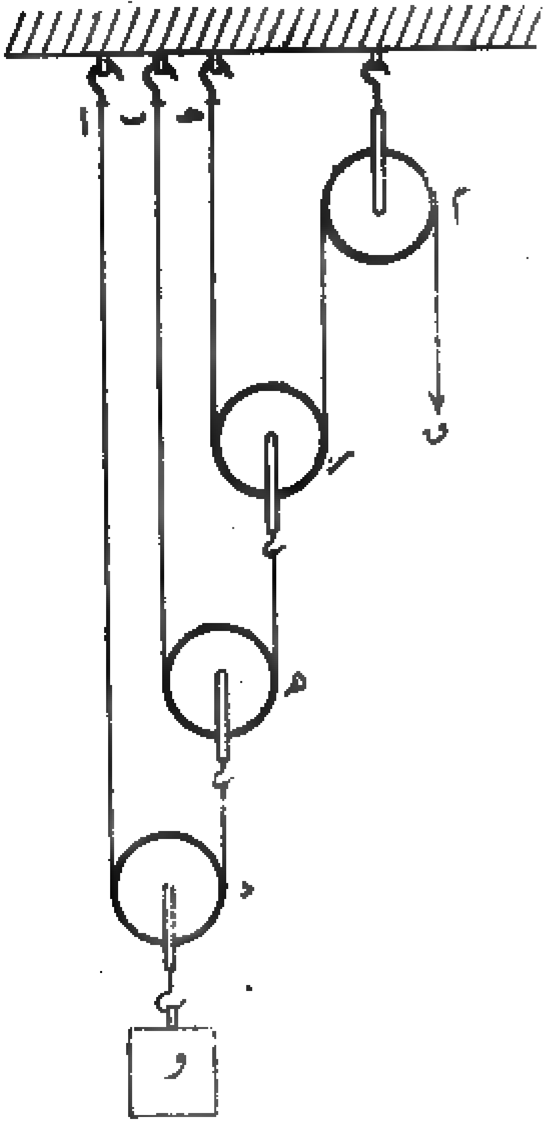
يتبين من الشكل تركيب هذه المجموعة وفيه يمر تحت أسفل بكرة خيط مثبت أحد طرفيه في النقطة ا . وطرفه الآخر متصل بالبكرة هـ التي يمر تحتها خيط آ ر مثبت أحد طرفيه في ب . والطرف الآخر متصل بالبكرة ر وهكذا .

وهناك بكرة ثابتة هي م تسهل العمل ولا تؤثر في الفائدة الآلية (الميكانيكية) للمجموعة . ويعلق الثقل و من أسفل بكرة وهي ء هنا .

وواضح أن الشدّ في الخيط المار تحت ء = $\frac{١}{٢}$ و فنعتبره الثقل المعلق من هـ . فينتج أن الشدّ في الخيط المار تحت هـ = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ و = $\frac{١}{٢^٢}$ و وكذا يكون

الشدّ فى الخيط المار تحت ر مساويا $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢^٢}$ و $= \frac{١}{٢^٣}$ و وهذا هو عين ق

فينتج أن



$$ق = \frac{١}{٢^٣} و$$

أى

$$و = ٢^٣ ق$$

واذا كان عدد البكرات المتحركة ن فكذلك يكون

$$و = ٢^ن ق$$

(مثال) ما القوة اللازمة لتوازن ٥٦٠ باوندا بثلاث بكرات متحركة علما بأن ثقل كل ٤ باوندات ؟

الشدّ فى الخيط المار تحت أسفل بكرة يساوى

$\frac{١}{٢}(٥٦٠ + ٤) = \frac{١}{٢} \times ٥٦٤$
$= ٢٨٢$ باوندا .

والشد فى الخيط المار تحت البكرة التالية يساوى :

$\frac{١}{٢}(٢٨٢ + ٤) = ١٤٣$ باوندا .

والشدّ فى الخيط المار تحت البكرة الثالثة يساوى .

$\frac{١}{٢}(١٤٣ + ٤) = ٧٣\frac{١}{٢}$ من الباوندات

فالقوة اللازمة تساوى

$٧٣\frac{١}{٢}$ من الباوندات .

(تمارين ٢٨)

(١) ما القوة اللازمة لسحب جسم كتلته ٦٠ كيلوجراما الى أعلى على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠}$ بفرض أن القوة توازى المستوى وأن معامل الاحتكاك $= \frac{١}{٢}$ ؟

أوجد أيضا القوة اللازمة لسحب الجسم الى أسفل .

(٢) سحب جسم كتلته ٢٠٠ كيلوجرام الى أعلى على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٣٠° بقوة قدرها ثقل ١٨٠ كيلوجراما . فاذا مالت القوة على المستوى بزاوية ٣٠° فما معامل الاحتكاك بين المستوى والجسم ؟

(٣) وضع مستويان مائلان أملسان بحيث انطبق ارتفاع أحدهما على ارتفاع الآخر فاذا كان ارتفاع كلٍّ ١٢٠ سنتيمترا وكانت قاعدة أحدهما ٩٠ سنتيمترا وقاعدة الآخر ١٦٠ سنتيمترا وقد مرّ خيط على بكرة فى أعلاهما يحمل جسمين أحدهما وكتلته ٣٠ كيلوجراما مستقر على أقصر المستويين . وثانيهما مستقر على المستوى الآخر . فما كتلة الجسم الثانى ؟

(٤) رافعة منتظمة طولها متران . وثقلها ٥ كيلوجرامات . فاذا كانت نقطة الارتكاز على مسافة نصف متر من أحد طرفيها فما الثقل الذى يعلق من طرف الذراع القصيرة حتى يوازن آخر قدره ١٢ كيلوجراما معلقا من طرف الذراع الطويلة ؟

(٥) وُزن جسم فى كل من كفتى ميزان ذراعاه غير متساويتين . فظهر أن وزنه أولا ٢٩٫٦٢ من الجرامات وثانيا ٢٨٫٧ من الجرامات . ما وزنه الحقيق وما النسبة بين ذراعى الميزان ؟

(٦) القضيب ا ب طوله ٥ أقدام ووزنه ١٠ پاوندات يتزن فى نقطة ارتكاز بعدها عن ا يساوى ٣ أقدام . فاذا وضع على حاملين أحدهما فى ا والآخر فى ب فما مقدار الضغط على كلٍّ ؟

(٧) الرافعة ا ب طولها ٨ أقدام ونقطة الارتكاز تبعد عن ب قدمين فاذا علق جسم ثقله ٥ پاوندات من ا وآخر ثقله ١٧ پاوندا من ب ففى أى نقطة يعلق جسم ثقله ٢٫٥ من الپاوندات حتى تتزن الرافعة ؟

وأين مركز ثقلها اذا صح اهمال ثقلها فى هذه المسألة ؟

(٨) اذا كانت الزاوية بين القوة المحركة والمستوى المائل تساوى الزاوية بينه وبين الأفق بحيث يكون ظل كلٍّ $\frac{1}{2}$ فأثبت أن

٢ ق = و ٥

(٩) اذا كانت ر رد فعل المستوى المائل عند ما تكون القوة المحركة أفقية ، رَ رد فعله عند ماتوازيه القوة فأثبت أن

$$و = \sqrt{ر \, رَ}$$

(١٠) سُحب جسم ثقله ٨٠ باوندا الى أعلى فوق لوح مائل بزاوية ٣٠° فما القوة التى يجب أن تؤثر فيه ؟

(أولا) بحيث يكون اتجاهها موازيا اللوح .

(ثانيا) بحيث يكون اتجاهها أفقيا .

(١١) برهن على أن الشغل المبذول فى سحب جسم على مستوٍ مائل أملس من أسفله الى أعلاه بقوة موازية للستوى يساوى الشغل المبذول فى رفع هذا الجسم رفعا رأسيا مسافة تساوى ارتفاع المستوى .

(١٢) برهن على أن الشغل المبذول فى سحب جسم على مستوٍ مائل خشن من أسفله الى أعلاه يساوى الشغل المبذول فى سحب الجسم نفسه على طول قاعدة المستوى (بفرض أن خشونتها تساوى خشونة المستوى) مضافا اليه الشغل المبذول فى رفعه رفعا رأسيا مسافة تساوى ارتفاع المستوى .

(١٣) طول ذراع لولب يساوى قدمين ، ودرجته تساوى بوصتين فاذا كانت القوة المحركة المؤثرة فى طرفها تساوى ثقل ١٠٠ باوند فما ضغط المكبس .

(١٤) درجة لولب تساوى نصف سنتيمتر وطول ذراعه ٣٠ سنتيمترا . فاذا أثرت قوة قدرها ثقل ٥ كيلوجرامات فى طرفها فما مقدار ضغط المكبس؟

(١٥) فى المجموعة المركبة من بكرة واحدة ثابتة وبكرة واحدة متحركة القوة المحركة تساوى ٧ باوندات . والثقل شاملا ثقل البكرة المتحركة يساوى ١١ باوندا أوجد شد الخيط وعجلة كل من الثقل والقوة باهمال الاحتكاك وعزم قصور البكرتين .

(١٦) اذا دار شريط اللولب ٢٥ دورة فى كل ٣ بوصات وكان طول ذراع القوة ٢٤ بوصة فما مقدار القوة اللازمة لاتزان ثقل قدره ١١٢ باوندا ؟

(١٤)

(١٧) وقف رجل فى كفة ميزان معلقة بحبل مارّ على بكرة ووق نفسه السقوط بشدّ طرفه الخالص فما ضغطه للكفة ؟

(١٨) القضيب ا ب يدور حول مفصل فى ا فاذا رُكز الطرف ب على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٦٠° حتى يكون القضيب مائلا على الأرض بزاوية ٣٠° واتصل ب بخيط مارّ على بكرة فى أعلى المستوى يحمل ثقلا قدره نصف ثقل القضيب فما ضغط القضيب على المستوى ؟

الباب الثانى عشر

الأيدروستاتيكا

ضغط الموائع

بند ١٣١ — تعاريف .

أشرنا فى بند (٣) الى أن المادة لها ثلاث أحوال . وهى: الصلابة والسيلان والغازية . وقلنا ان الأجسام الصلبة تختلف عن السائلة والغازية فى أن لها شكلا معينا . وتدخل السوائل والغازات فى حكم الموائع .

الايدروستاتيكا هى علم توازن الموائع .

كثير من الموائع المعروفة لايقاوم التغير فى شكله إلا قليلا جدا . ومن هذا يمكننا أن ندرك معنى المائع التصورى وهو الذى لايقاوم التغير فى شكله مطلقا . ويسمى بالجسم التام الميْع .

فالماء والكحول مثالان تقريبيان للجسم التام الميْع بخلاف ما هو من قبيل الزيت والقطران والعسل والهلام الخ فانها تقاوم التغيير فى شكلها بعض المقاومة . وتسمى بالموائع اللزجة . وقد دلّت التجارب على أن مقاومة المائع اللزج للتغير تتوقف على سرعته . وتكون لا نهائية فى الصغر إذا كان إحداث التغير بطيئا جدا . فاذا كان الوقت كافيا يصير المائع اللزج فى حالة ما الى الشكل الذى يصير اليه الجسم التام الميْع حالا .

ويمكن أن يعبر عن الفرق بين الجسم التام الميْع والمائع اللزج بطريق آخر . فليس فى الجسم التام الميْع مقاومة احتكاكية بين جزئياته لزلّق أحدها على الآخر . وفى الموائع اللزجة نرى هذه المقاومة . ولايضاح ذلك يُصَب مَقدار من مائع كالماء على الأرض ومقدار من مائع لزج جدا كالعسل . فلكون المقاومة الاحتكاكية بين جزئيات الماء يسيرة جدا ينتشر سريعا مكونا طبقة رقيقة جدا . وكذلك ينتشر العسل أيضا ولكن بعد زمن طويل .

نستنتج من التعريف السابق للجسم التام الميع أن ضغطه لأى سطح ملامس له يكون عموديا عليه . وفى الموائع اللزجة مقاومة احتكاكية فى اتجاه المماس للسطح الذى يلامسه المائع . وتصير لا نهائية فى الصغر اذا تحرك المائع على السطح تحركا بطيئا جدا . فتُهمل اهمالا تاما فى الموائع الساكنة . فلا حاجة عند النظر فى توازن الموائع الى مراعاة اللُزوج فنستنتج القانون الأساسى فى علم الايدروستاتيكا وهو :

ضغط أى مائع ساكن على أى سطح ملامس له يكون عموديا عليه .

بند ١٣٢ — قابلية السوائل للضغط .

ذكرنا فى بند (٣) أن السوائل لها حجم ثابت . ولكن هذا ليس الحقيقة بالضبط . فكل السوائل تقبل بعض الضغط . وهى تقاومه مقاومة عظيمة جدا . وقد دلت التجارب على أن حجومها تتغير تغيرا يمكن إدراكه اذا ضغطت ضغطا كبيرا .

فالماء يضغط بمقدار $\frac{١}{٢٠٠٠٠}$ من حجمه اذا وقع على البوصة المربعة منه ضغط مقداره ١٤ باوندا .

ومن حيث إن قابلية السوائل للضغط يسيرة جدا فمن المعتاد فى الايدروستاتيكا إهمالها تماما واعتبار السوائل موائع غير قابلة له فلا تختلف إذن النتائج المؤسسة على قواعد الايدروستاتيكا عن النتائج المؤسسة على التجارب والمشاهدات إلا قليلا .

بند ١٣٣ — الضغط عند احدى نقط المائع .

يجب عند تقدير ضغط مائع لسطح ملامس له أن نختار وحدة خاصة للقوة وأخرى للمساحة .

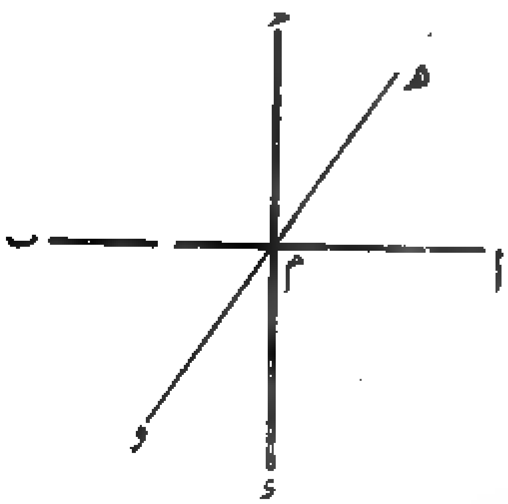
فاذا كان ضغط المائع للسطح منتظما فان مقدار هذا الضغط يساوى عدد وحدات القوة المؤثرة فى وحدة السطح . فمثلا ضغط البخار لسطح مرجل عبارة عن الضغط الواقع على كل بوصة مربعة مقدّرا بالباوندات .

واذا كان ضغط المائع لسطح ملامس له غيرَ منتظم فانه عند نقطة معينة يقدّر كما تقدّر الكميات المتغيرة . فهو عبارة عن الضغط الذى كان يقع على وحدة من السطح لو ساوى الضغط عند جميع نقط وحدة السطح الضَغطَ عند النقطة المعينة . ويسهل على الطالب تصور هذا فقد مرّ به مثله فى تقدير السرعة المتغيرة والعجلة المتغيرة .

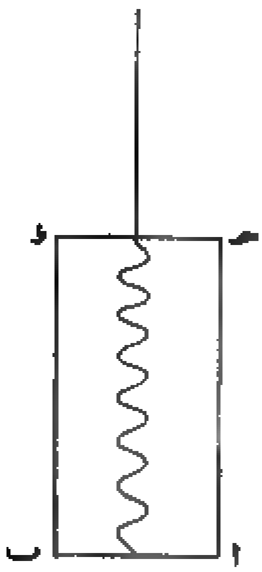
الضغط عند نقطة داخل مائع هو الذى يقع على وحدة من السطح وُضعت فى تلك النقطة فالضغط عند نقطة تحت سطح البحر بمسافة ميل واحد يساوى ٢٢٧٠ باوندا تقريبا على كل بوصة مربعة .

بند ١٣٤ — تساوى الضغط فى جميع الجهات .

يتساوى الضغط فى جميع الجهات عند نقطة داخل مائع . فاذا كانت م نقطة داخل مائع يكون الضغط (على فرض انتظامه) الواقع على وحدة السطح ا ب الأفقية مساويا الضغط (على فرض انتظامه) الواقع على وحدة السطح حـ ى الرأسية ويقال على العموم إنه يساوى الضغط الواقع على وحدة أى سطح مثل هـ و ويمكن بيان ذلك بالتجربة الآتية :



لتكن ا ب حـ ى أسطوانة أقفلت احدى نهايتيها ورُكب على نهايتها الأخرى المكبس حـ ى الذى يصله بالنهاية ا ب سلك نابض . فاذا وضعت الأسطوانة بحيث يكون مركز المكبس منطبقا على نقطة معينة داخل المائع فان المكبس يُضغط الى الداخل بحيث يكون ضغط المائع له مساويا القوة التى يحدثها السلك المضغوط . ومهما كان وضع الاسطوانة (رأسية أو أفقية أو مائلة على الاتجاه الرأسى بأى زاوية) فان المكبس يدفع الى الداخل مسافة معينة ما دام مركزه منطبقا على النقطة المعينة .

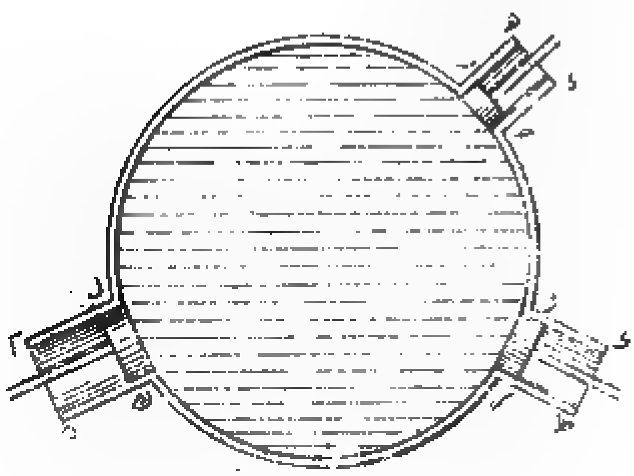


ويتضح من ذلك أنه مهما كان وضع المكبس فان ضغط المائع له يكون ثابتا ما دام مركزه منطبقا على نقطة معينة فى المائع .

فينتج أن ضغط المائع عند نقطة ما واحدٌ فى جميع الجهات .

بند ١٣٥ — انتقال الضغط فى المائع .

اذا ضغطت نقطة من مائع فان الضغط ينتقل فى جميع الجهات على السواء ولاثبات ذلك نقول :



ليكن الشكل ممثلا لاناء مقفل به مائع قابل أو غير قابل للضغط .

وبه الفتحات ب ح ء هـ ، و ر ط ى ، ك ل م ن وفيها المكابس ب ح ، و ر ، ك ل .

فترى أن ضغط المائع للمكابس يعمل على دفعها الى الخارج . فاذا وازنا هذه الضغوط بأثقال أو بوسيلة أخرى ثم أوقعنا ضغطا إضافيا على أحد المكابس وهو ب ح مثلا الى الداخل فانه يُنقل الى المكبسين و ر ، ك ل .

نرمز بالرموز $ا_١$ ، $ا_٢$ ، $ا_٣$ الى مساحات المكابس ب ح ، و ر ، ك ل وبالرمز $ق_١$ الى هذا الضغط الاضافى فيكون :

$$\frac{ق_١}{ا_١}$$

هو الضغط الاضافى الواقع على كل وحدة من مساحة سطح المكبس ب ح .

واذا رمزنا بالرمزين $ق_٢$ ، $ق_٣$ الى الضغطين الاضافيين على و ر ، ك ل الى الخارج يكون :

$$\frac{ق_٣}{ا_٣} ، \frac{ق_٢}{ا_٢}$$

هما الضغطان الاضافيان الى الخارج الواقعان على كل وحدة من مساحتى المكبسين و ر ، ك ل وقد دلت التجارب على أن :

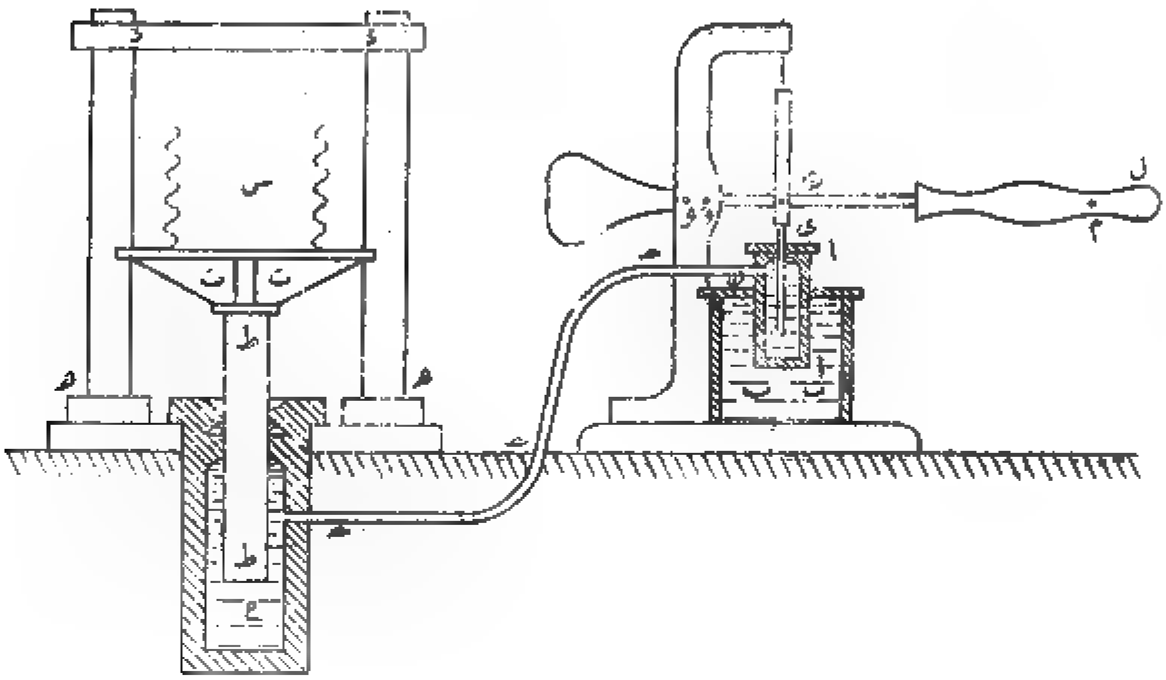
$$\frac{ق_٣}{ا_٣} = \frac{ق_٢}{ا_٢} = \frac{ق_١}{ا_١}$$

أى أن كلا من الضغطين الاضافيين الواقعين على كل وحدة من مساحتى المكبسين و ، ب ٥ ك ل يساوى الضغط الاضافى على كل وحدة من المكبس ب حـ .

بند ١٣٦ — مكبس براما (Bramah) .

يتوقف عمل المكبس الأيدروليكى (لبراما) على خصيه تساوى انتقال الضغط بالماء . وتتركب الآلة من جزأين . ففى أحدهما الاناء ب ب وبه ماء . وتركب عليه الاسطوانة ا ا التى يتحرك داخلها القضيب المعدلى ى الذى تحركه قوة توقع على النهاية م من المقبض ل الذى يتحرك حول النهاية الثابتة و وَ المتصلة بالقضيب فى النقطة د .

وفى الطرف الأسفل من الأسطوانة صمام ينفتح الى أعلى . وفى النقطة ك التى بجانب الأسطوانة صمام آخر ينفتح الى الخارج موصلا الى الأنبوبة حـ حـ المتصلة بالجزء الآخر من الآلة .



وهـذه الأنبوبة توصل الى أسطوانة كبيرة هى ع قد ركب فيهـا المكبس الكبير ط ط المثبت فى طرفه الأعلى اللوح ب ب َ الذى يتحرك فى الاطار ء ء هـ هـ . فاذا أريد ضـغط الجسم س مثلا وضـع على اللوح ب ب َ القـابل للتحرك . وحركت الآلة فيضغط بين ب ب َ والجزء الأعلى ء ء َ .

وتحرك الآلة برفع م طرف الرافعة ل فيرتفع القضيب ى فى الأسطوانة ا ا . ويؤثر ضغط المـاء فى الطرف الأسفل من الأسطوانة فينفتح الصمام الذى بهذا الطرف. ويدخل الأسطوانة ماء من الاناء ب ب . ثم يضغط م طرف الرافعة ل الى أسفل فينقل الضغط الى المـاء الذى بالأسطوانة . فيقفل الصمام الذى فى قعرها ويفتح الصمام الذى فى النقطة ك . فعند دفع القضيب الى أسفل يندفع ماء الأسطوانة ا ا فى الصمام ك والأنبوبة حـ حـ . ويدخل الأسطوانة الكبيرة ع فاذا رفعت الرافعة يقفل الصمام ك فيمنع المـاء من الرجوع الى الأسطوانة ا ا .

وكلما دفعت الرافعـة اندفع المـاء من الأسطوانة ا ا الى الأسطوانة الكبرى ع حتى يمتلئ الاناء ع ماء . واذا ما وصلنا الى هـذا الحد نرى أن الضغط الذى يحدثه القضيب ى فى ماء الأسطوانة ا ا ينقل الى المكبس ط ط فيضغط الى أعلى ضغطا النسبة بينه وبين ضغط القضيب الى أسفل كنسبة مساحة مقطع المكبس ط ط الى مساحة مقطع القضيب ى . فيمكن زيادة الفائدة الآلية (الميكانيكية) الى أى حدّ بزيادة النسبة بين مساحة المكبس ط ط ومساحة مقطع القضيب ى وينشأ أيضا من استعمال الرافعة ل فائدة آلية .

وتقدر الفائدة الآلية كما يأتى :

نفرض أن مسـاحة مقطع المكبس ط ط تساوى مساحة مقطع القضيب ر من المرات ونرمز الى الطول و م بالرمز صـ علما بأن م هى النقطة التى فيها تؤثر القوة المحركة . ونرمز بالرمز ع الى الطول و د . فاذا أثرت القوة ق فى النقطة م من الرافعـة ينتج من قانون الروافع أن الضـغط الذى يحدثه القضيب الى أسفل يساوى

$$\frac{ق\ صـ}{ع}$$

وبمقتضى قانون تساوى انتقال الضغط يتساوى نقل الضغط الى جميع أجزاء الطرف الأسـفل من المكبس ط ط . ولكون مساحة مقطع المكبس ط ط يسـاوى مساحة مقطع القضـيب ر من المرات ينتج أن ط ط يضغط الى أعلى بقوة تساوى

$$\frac{ر\ ق\ صـ}{ع}$$

فهذه هى القوة التى تؤثر فى الجسم س الذى بين اللوح المتحرك والطرف الأعلى من الايطار .

(مثال) إذا كان ع = قدما واحدة ، ص = ٥ أقدام ومساحة مقطع القضيب ى = $\frac{١}{٢}$ قدم مربعة ومساحة مقطع الأسطوانة الكبرى ط ط = ٣٠ قدما مربعة يحدث أن

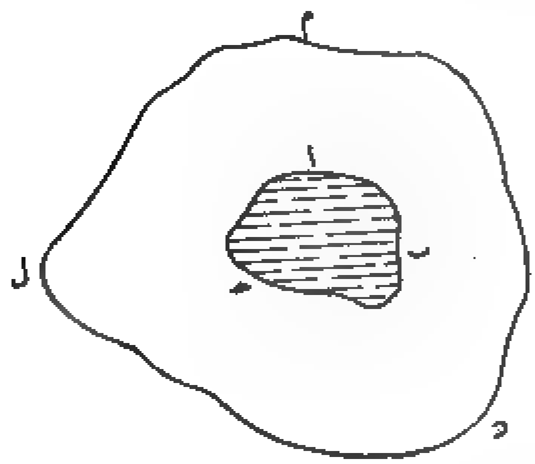
$$م = \frac{٣٠}{\frac{١}{٢}} = ٦٠ \text{ ، } \frac{ص}{ع} = \frac{٥}{١}$$

فتكون الفائدة الالية :

$$٦٠ \times ٥ = ٣٠٠$$

فاذا أثر ضغط مقداره ١٠ باوندات فى الطرف ب من الرافعة فان المكبس ط ط يحدث ضغطا على الجسم س مقداره ٣٠٠٠ باوند .

بند ١٣٧ — يمكن اعتبار جزء من أى مائع ساكن صلبا من غير إخلال باتزان ذلك الجزء . فعلى هذا يمكن تطبيق قواعد الاستاتيكا على الموائع .



فاذا فرضنا أن ل م د مائع وبحثنا فى اتزان جزء منه مثل ا ب حـ فانه يمكن اعتباره صلبا . ولا تتغير الضغوط الواقعة على ا ب حـ من المائع المحيط به وكذا لاتتغير القوى المؤثرة فيه كقوة التثاقل فلا يضطرب اتزانه .

بند ١٣٨ — تأثير التثاقل فى الموائع .

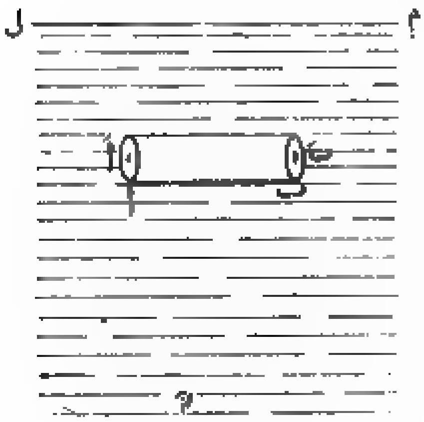
كل نقطة مادية من المائع تؤثر فيها قوة التثاقل . فلها حينئذ ثقل .

وسنفرض فى هذا الباب أن المائع غير قابل للضغط وأنه متجانس الكثافة .

ويكون الضغط عند نقطة من المائع واحدا فى جميع الجهات وإنما يتغير من نقطة الى أخرى .

وإنا شارعون فى إثبات ثلاث نظريات تتعلق بالضغوط فى نقط مختلفة من مائع غير قابل للضغط متجانس الكثافة تؤثر فيه قوة التثاقل .

(١) لايتغير الضغط فى جميع النقط التى فى مستوٍ أفقى .



ليكن ل م د جزءا من مائع متجانس الكثافة ، ا ب اسطوانة أفقيـة من السائل رفيعة جدا قد صارت صلبة فهذا لايخل بالتوازن ولاتزال الاسطوانة ساكنة تحت تأثير القوى التى كانت تؤثرفيها وهى سائلة .

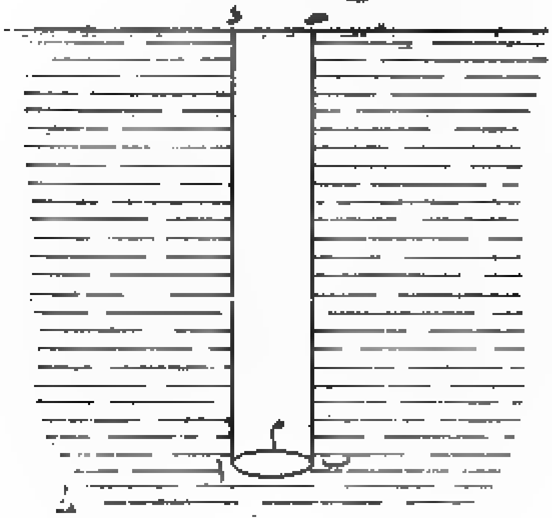
وهذه القوى هى (١) ثقل الاسطوانة ثقلا رأسيا الى أسـفل ، (٢) ضـغوط المـائع المحيط بها على سطحها ، (٣) ضغوط المـائع على القاعدتين ا ، ب فى اتجاه محور الاسطوانة . والقوتان الأوليان ليس لهما مركبة فى اتجاه ذلك المحور ومن حيث إن الاسـطوانة ساكنة ينتج أن الضغطين على القاعدتين متساويان .

ويمكن أن تكون الاسطوانة رفيعـة جدًا حتى يكون الضـغط واحدا فى كل نقطة من القاعدتين .

ومن حيث إن الضغطين الكليين على القاعدتين متساويان وإن مساحتى القاعدتين متساويتان أيضـا ينتج أن الضغطين فى آ ، بَ مركزى القاعدتين متساويان . ولكون آ ، بَ نقطتين على مستقيم أفقى واحد تثبت النظرية .

(٢) الضغط عنـد أى نقطة داخل مائع غير قابل للضغط يساوى ثقل عمود من المـائع مقطعة وحدة المساحة وارتفاعه يساوى عمق النقطة فى المـائع .

لتكن م نقطة من المـائع ، ا ب وحدة من السطح قد وضعت وضعا أفقيا فى م فيكون الضـغط الواقع على ا ب منتظما فيقدر الضغط عند م بالضغط الكلى الواقع على ا ب . واذا تصورنا أن العمود ا ب حـ ى قد صار صلبا فانه يكون تحت تأثير (١) الضغط الواقع عليـه من المـائع المحيط به و (٢) ثقله و (٣) الضغط الى أعلى على ا ب .



ومن حيث ان الضغوط الواقعة عليه من المائع المحيط به عمودية عليه ينتج أنها تؤثر فى اتجاهات أفقية فليس لها اذن مركبة رأسية .

فالقوتان الباقيتان المؤثرتان فى اتجاه رأسى تتوازنان أى أن ثقل العمود ا ب حـ ء يساوى الضغط على القاعدة ا ب .

وينتج أن الضغط عند أى نقطة من مائع يُناسب عمقها فيه وأنه اذا تساوى الضغطان فى نقطتين يكون عمقهما فى المائع واحداً .

(٣) سطح المائع الساكن غير القابل للضغط أفقى .

تنتج هذه النظرية مباشرة من النظريتين السابقتين . وذلك لأن أى نقطتين على سطح المائع يمكن اعتبارهما على عمق واحد تحت سطحه . فيكون الضغطان عندهما متساويين . فينتج من نظرية (١) أنهما فى مستوٍ أفقى .

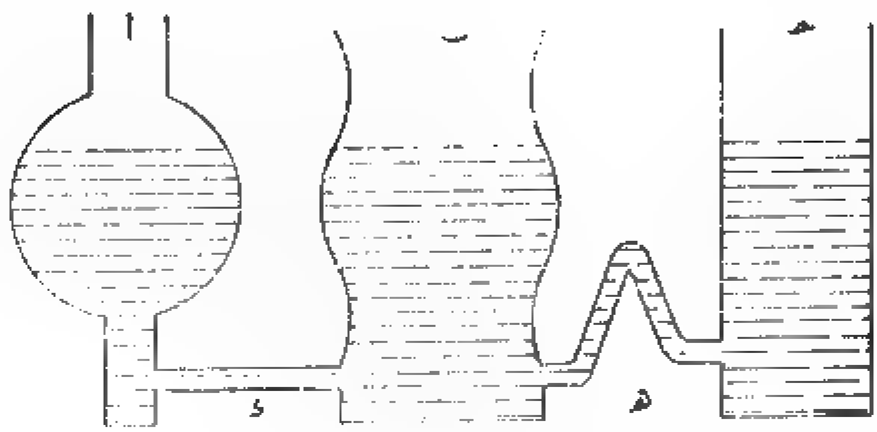
بند ١٣٩ — أهملنا فى البند السابق تأثير الضغط الجوى . وسنعلم بعد مقدار ما يحدثه من زيادة الضغط عند نقطة داخل مائع .

قد أثبتنا أن سطح المائع غير القابل للضغط أفقى . وكان ذلك مؤسساً على فرض أن تأثير قوة التثاقل فى اتجاهات متوازية . أى أن الخطوط الرأسية متوازية .

وقد رأينا فى بند (٦٨) أن هذا ليس صحيحاً تماماً فالمستقيمات الرأسية تجتمع فى مركز الأرض . وسطح المائع الساكن هو فى الواقع جزء من سطح كرى . وليس هناك خطأ عظيم فى اعتبار سطح بحيرة صغيرة أفقياً . ولكن يجب الجرى على أن سطح المحيط كرى فى مسائل الملاحة العملية .

ويتأثر شكل سطح كبير من الماء بتغير الضغط الجوى .

بند ١٤٠ — اذا كان فى جملة من الاوانى المستطرقة ماء فان سطوحه فيها جميعاً تكون على استواء واحد .



فاذا كانت الأوانى هى ا ، ب ، حـ واتصلت ا ، ب بالأنبوبة ء واتصلت ب ، حـ بالأنبوبة هـ ثم صب ماء فى ا فانه يرتفع حتى يصير على استواء واحد فيها جميعا ولو كانت الأنبوبة الموصلة هـ غير أفقية ما دامت أعلى نقطة منها تحت سطح الماء الذى فى ب .

وعلى هذه النظرية يوزع الماء من خزان بأنابيب فى مدينة . وليس من الضرورى وضع الأنابيب وضعا أفقيا . وانما يجب ألا توضع فوق تل قمته أعلى من سطح الماء بالخزان .

بند ١٤١ — الضغط الكلى على مستوٍ أفقى .

اذا غمس سطح فى سائل متجانس الكثافة وكان أفقيا فيه فان الضغط عند أى نقطة منه يساويه عند أى نقطة أخرى . وعلى ذلك يقدّر الضغط الكلى على السطح بضرب عدد وحدات المساحة التى يحتوى عليها فى الضغط على وحدة المساحة .

نرمز بالرمز ع الى عمق السطح فى السائل وبالرمز ح الى عدد وحدات المساحة التى يحتوى عليها السطح وبالرمز و الى ثقل وحدة الحجم من السائل .

والعمود الذى قاعدته وحدة المساحة . وقد وضعت وضعا أفقيا على عمق ع حجمه يساوى ع من وحدات الحجم فيكون ثقله و × ع . فهذا هو الضغط الواقع على وحدة السطح ولكون مساحة السطح تساوى ح من وحدات المساحة ينتج أن الضغط الكلى على السطح يساوى ح ع و .

وفى جميع المسائل العملية يقدر ثقل القدم المكعبة من الماء بما يساوى ٦٢٫٥ من الباوندات فيكون الضغط على سطح أفقى مساحته ح من الأقدام المربعة وعمقه فى الماء ع من الأقدام هو ٦٢٫٥ ح ع من الباوندات وثقل السنتيمتر المكعب من الماء يساوى جراما واحدا فالضغط على سطح أفقى مساحته ح من السنتيمترات المربعة وعمقه فى الماء ع من السنتيمترات يساوى

ح ع من الجرامات

(مثال) مكعب طول حرفه قدمان قد وضع على أحد أوجهه فى قعر إناء فيه ماء عمقه ٤ أقدام . أوجد الضغط الكلى على الوجه الأعلى منه .

السطح الأعلى من المكعب هنا على قدمين من سطح الماء أى أن ع = ٢
ومساحة وجه المكعب = ٤ أقدام مربعة أى أن ح = ٤

فالضغط الكلى على وجه المكعب يساوى ٦٢,٥ × ٤ × ٢ = ٥٠٠ باوند .

بند ١٤٢ — الضغط الكلى على سطح غير أفقى .

اذا كان السطح غير أفقى فان الضغط يتغير من نقطة الى أخرى . ولايجاد الضغط الكلى فى هذه الحالة يضرب الضغط المتوسط الواقع على السطح فى عدد وحدات مساحته . ويمكن إثبات أن الضغط المتوسط على سطح مغموس فى سائل يساوى الضغط عند مركز ثقله . ولسنا مثبتين هذه النظرية ببرهان عام . و يسهل على الطالب إدراك صحتها فى متوازى الأضلاع المغموس فى السائل بحيث يكون حرفان منه موازيين سطحه . فلكون الضغط يتغير بتغير العمق ينتج أن الضغط المتوسط على متوازى الأضلاع يساوى نصف مجموع الضغط عند الحرف الأعلى والضغط عند الحرف الأسفل . أى يساوى الضغط عند نقطة على عمق يساوى نصف مجموع عمق الحرفين الأعلى والأسفل . وعمق مركز ثقل متوازى الأضلاع يساوى نصف مجموع عمق الحرفين الأعلى والأسفل فتثبت صحة النظرية فى متوازى الأضلاع الذى يكون حرفان منه موازيين سطح السائل .

فاذا سلمنا صحة النظرية على الاجمال نستنبط القاعدة الآتية لايجاد الضغط الكلى على سطح مغموس فى السائل بأى وضع .

نأخذ حاصل ضرب مساحة السطح وعمق مركز ثقله وثقل وحدة حجم السائل .

(مثال ١) أوجد الضغط الواقع على أحد الأوجه القائمة من المكعب فى المثال الذى بالبند السابق .

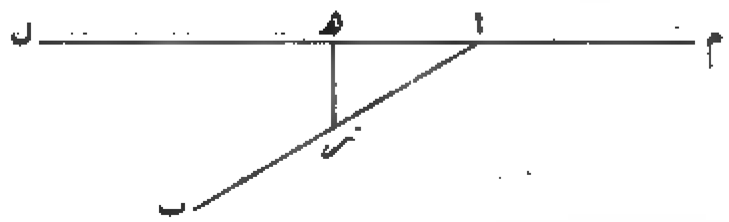
من الواضح أن عمق مركز ثقل الوجه القائم يساوى $\frac{1}{2}$ (٢ + ٤) أى ٣ أقدام فالضغط الكلى على ذلك الوجه

= ٦٢,٥ × ٤ × ٣ = ٧٥٠ باوندا .

(مثال ٢) لوح مربع طوله قدمان غمس فى الماء بحيث يكاد أحد أحرفه ينطبق على سطحه .

فاذا مال على الأفق بزاوية قدرها ٣٠° فأوجد الضغط على أحد جانبيه .

ليكن الشكل ممثلا لمقطع رأسى يمر بمركز ثقل اللوح عموديا على مستويه علما بأن ل م الخط الذى فيه قطع سطح المائع بهذا المقطع وأن ا ب الخط الذى فيه قطع اللوح .



ن مركز ثقل اللوح هى منتصف ا ب فاذا رسم ن هـ عمودا على ل م يكون ن هـ عمق مركز ثقل اللوح .

ثم ان ن هـ = ا ن جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ ا ن = $\frac{1}{4}$ ا ب

= $\frac{1}{4}$ × ٢ من الأقدام = $\frac{1}{2}$ قدم .

فالضغط الكلى على أحد جانبى اللوح .

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦٢٫٥ = ١٢٥ باوندا .

بند ١٤٣ — مركز الضغط .

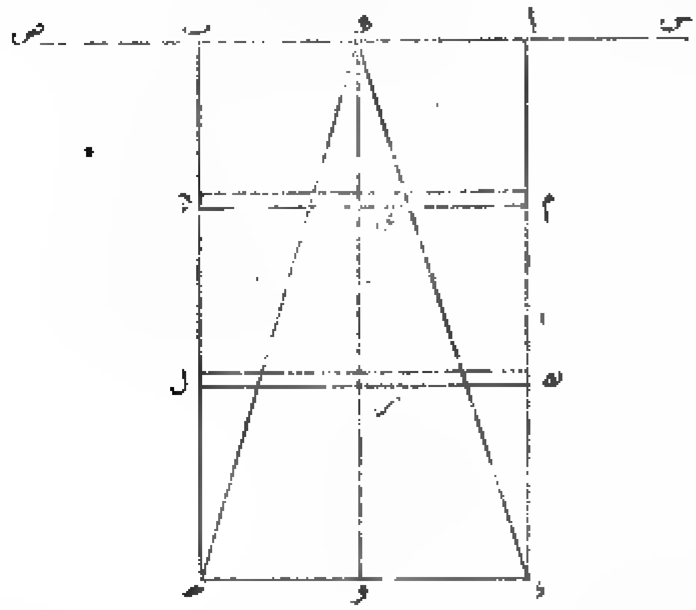
اذا غمس سطح فى مائع فان النقطة التى تؤثر فيها محصلة جميع ضغوط المائع على ذلك السطح تسمى مركز ضغطه .

بند ١٤٤ — مركز ضغط مستطيل مغموس فى مائع وأحد أحرفه منطبق على سطحه .

تعيين مركز الضغط يستدعى غالبا الاستعانة بعلم التكامل . ولكن هناك حالة أو اثنتين فيهما يتسنى تعيين موضع مركز الضغط بالرياضة الابتدائية .

ليكن أ ب حـ ى مستطيلا قد غمس غمسا رأسيا فى مائع . وأحد أحرفه أ ب منطبق على س ص سطح المائع .

نتصور انقسام مساحة المستطيل الى عدد لا نهاية له من قطع ضيقة كل منها يوازى أ ب ولتكن ك ل إحدى هذه القطع وليكن هـ و المستقيم الرأسى الذى ينصف المستطيل .



فمن حيث إن القطعة ك ل لانهائية فى الضيق يكون الضغط عليها منتظما وتكون محصلة الضغط عليها عبارة عن ضغط يؤثر فى النقطة ر (نقطة تقاطع هـ و ، ك ل) فى اتجاه عمودى على مستوى المستطيل . وكذا تكون محصلة الضغط على القطعة م د عبارة عن قوة واحدة تؤثر فى النقطة ى (نقطة تقاطع هـ و ، م د) فى اتجاه عمودى على مستوى المستطيل . ويمكن تقسيم المستطيل بحيث تكون القطع متساوية وقد علمنا أن الضغط يناسب العمق اذن

محصلة الضغط الواقع على ك ل : محصلة الضغط الواقع على م د = هـ ر : هـ ى

وينتج أن محصلة الضغط على المستطيل بأكمله هى المحصلة لمجموعة من القوى المتوازية تؤثر فى نقط المستقيم هـ و . ومقدار كل قوة يناسب بعد نقطة تأثيرها عن هـ .

واذا رجع الطالب الى بند (٧٠) يسهل عليه أن يرى أن مسألة ايجاد نقطة تأثير محصلة هذه المجموعة من القوى المتوازية تؤول الى ايجاد نقطة المستقيم هـ و التى ينطبق عليها مركز ثقل المثلث هـ ى حـ . فنعلم أن مركز ضغط المستطيل أ ب حـ ى يقع على هـ و على بعد من السطح أ ب مساو لثلثى هـ و .

ويصح أيضا البرهان المتقدم فى المستطيل اذا أدير حول الحرف أ ب حتى يصير فى أى وضع مائل على الخط الرأسى لأن الضغطين الواقعين على القطعتين ك ل ، م د لايزالان يناسبان هـ ر ، هـ ى .

(تمارين ٢٩)

[يعتبر فى هذه المسائل أن ثقل القدم المكعبة من المـاء يساوى ٦٢٫٥ من الباوندات]

(١) لوح مربع طول ضلعه متر واحد . وضع فى المـاء بحيث كان حرفه الأعلى تحت السطح بمسافة ٣ أمتار وكان أفقيا . وكان مستوى اللوح رأسيا . أوجد الضغط الكلى على أحد سطحيه .

(٢) أوجد الضغط الكلى على كل من جانبى لوح مستطيل الشكل طوله ١٤ قدما وعرضه ٦ أقدام قد غمس فى المـاء بحيث صار ضلعاه الطويلان أفقيين وكان حرفه الأعلى تحت سطح المـاء بمسافة ٥ أقدام وحرفه الأسفل تحت المـاء بمسافة ٩ أقـدام .

(٣) إناء مكعب طول أحد أحرفه ٣ أمتار ملئ بالمـاء أوجد الضغط الكلى على قعره وكذا على أحد جانبيه .

(٤) اذا كان ضغط المـاء على سدّ طوله ١٠٠ قدم يساوى ٢٥٣١٢٥ باوندا . فما عمق المـاء ؟

(٥) هويس ترعة طوله ١٦ مترا وعرضه ٤ أمتار وعمقـه متران . فما الضغط الكلى على بابه وكذا على قعره ؟

(٦) حوض للسباحة طوله ٥٠ قدما و به ماء عمقه ٤ أقدام . أوجد مقـدار الضغط على جانب منه بالباوندات .

(٧) اذا ملئ حوض بالمـاء فقارن بين الضغط على النصف الأعلى من أحد جوانبـه والضغط على النصف الأسفل .

(٨) ملئت أسطوانة بالمـاء وشدّ طرفاها ثم وضعت (أوّلا) بحيث كان محورها رأسيا (وثانيا) بحيث كان أفقيا . أثبت أن النسبة بين الضغط الكلى على السطح المنحنى فى الحـالة الأولى والضغط الكلى عليه فى الثانية كالنسبة بين ارتفاع الأسطوانة وقطرها .

(٩) غمس مثلث فى سائل بحيث كانت قاعدته أفقية على عمق ٩ أقدام . ورأسه على عمق ١٢ قدما . فاذا كانت مساحته ٦ أقدام مربعة وثقل القدم المكعبة من السائل ٧٠ باوندا . فما الضغط الكلى على المثلث ؟

(١٠) علمت المساحتان الصغيرتان المتساويتان ا ، ب على جانب خزان مملوء بالماء على عمقين مختلفين فكان الضغط على ا أربعة أمثال الضغط على ب . فاذا انخفض سطح الماء بمقدار قدم واحدة كان الضغط على ا خمسة أمثال الضغط على ب . فما عمق كل من ا ، ب فى الحالة الأصلية ؟

(١١) خزان بأحد جوانبه باب مستطيل هو ا ب حـ ء قابل للدوران حول ضلعه الأسفل الأفقى حـ ء . ما القوة اللازم إيقاعها على ا ب لبقاء الباب مقفلا . علما بأن طول ا ب = قدما واحدة وطول ا ء = ١٢ قدما وأن سطح الماء يبلغ ا ب ؟

(١٢) إناء أسطوانى به ماء . أميل على التدريج بدون أن يصب من الماء شئ حتى صار الضغط على قاعدته نصف ما كان آنفا . فما ميل محوره على الخط الرأسى ؟

[قد فرض فى هذه المسألة أن قاعدة الأسطوانة مغمورة بالماء . فما أقل مقدار من الماء يكون به هذا الشرط ممكنا ؟ وما أقصر ارتفاع للاناء كذلك ؟ قدّر بدلالة نصف قطر القاعدة] .

(١٣) خزان قائم طوله ٤ أمتار وعمقه متران ملئ ماء فاذا رسم قطر فى أحد جوانبه الرأسية فأوجد الضغط الكلى على كل من المثلثين اللذين ينقسم اليهما ذلك الجانب . لِمَ يكون الجواب غير مرتبط بعرض الخزان ؟

(١٤) غمر المثلث ا ب حـ فى الماء غمرا تاما بحيث كان رأسه ا فى سطح الماء وكان منصف زاوية ب (وهو ب ء) أفقيا . فاذا كان ا ب = $\frac{٣}{٥}$ ب حـ فأثبت أن نسبة الضغط الكلى على المثلث ا ب ء الى الضغط الكلى على المثلث ب حـ ء كنسبة ٩ : ٣٥ .

(١٥) اناء قاعدته مسدس منتظم وجوانبه رأسية . فاذا كان طول ضلع المسدس ٣ سنتيمترات فالى أى ارتفاع يجب ملء الاناء بسائل حتى يكون الضغط على أحد جوانبه مساويا الضغط على القاعدة ؟

(١٦) أوجد الضغط الكلى مقدرا بالجرامات على مثلث مساحته ١٠ سنتيمترات مربعة قد غمس فى الماء ورؤوسه تحت السطح بمسافات ٣ سنتيمترات ، ٤ سنتيمترات ، ٥ سنتيمترات .

(١٧) غمس مثلث فى سائل بحيث كان رأسه فى سطحه وقاعدته أفقية . اقسمه بمستقيمين يوازيان القاعدة الى ٣ أقسام الضغوط عليها متساوية .

(١٨) أسطوانة مملوءة بسائل قسم سطحها المنحنى بمستويات موازية القاعدة الى ٥ أجزاء بحيث كان الضغط الكلى على كل منها مساويا الضغط على القاعدة . فاذا كان نصف قطر القاعدة ١٠ سنتيمترات فأوجد ارتفاع الأسطوانة وارتفاع الجزء الثالث .

(١٩) غمس المستطيل ا ب حـ ى فى الماء بحيث كان الضلع ا ب فى سطحه . أوجد نقطة مثل ط فى ا ب بها يكون الضغط على المثلث ا ط ى خمس الضغط على المستطيل كله .

الباب الثالث عشر

الكثافة والثقل النوعى

بند ١٤٥ — الكثافة .

عرّفنا فى بند (٢٩) كثافة الجسم بأنها كتلة وحدة حجمه .

وتتعلق كثافة الجسم بدرجة حرارته . والعلاقة العامة بينهما هى أن الكثافة تنقص بازدياد درجة الحرارة . والماء يشذ عن هذه القاعدة . فقد دلت التجربة على أن الماء يبلغ كثافته العظمى فى درجة ٤ المئوية . أى فى درجة ٣٩,٢ بمقياس فرنهيت . فلذا تسمى هذه الدرجة بدرجة حرارة النهاية العظمى لكثافة الماء . فاذا اعتبرنا كثافته فيها واحدا تكون الكثافة فى درجة الصفر المئوية أى فى درجة الجمود ٠,٩٩٩٩ والكثافة فى درجة ١٠٠ المئوية أى فى درجة الغليان ٠,٩٥٨٧ وقد دلت التجارب أيضا على أن كتلة السنتيمتر المكعب من الماء فى درجة النهاية العظمى لكثافته تساوى ١,٠٠٠٠١٣ من الجرامات . وهذا يزيد على الواحد مقدارا صغيرا جدا . فليس من الخطأ المحسوس أن نعتبر فى حسابنا أن كتلة السنتيمتر المكعب من الماء تساوى كتلة الجرام الواحد بالضبط . وعلى هذا الاعتبار جرينا فيما يلى من هذا الكتاب .

فلو اتخذنا كتلة الجرام وحدة الكتل وحجم السنتيمتر المكعب وحدة الحجوم كان الرمز الدال على كثافة الماء وهو فى نهاية كثافته عدد ما فى سنتيمتر مكعب منه من الجرامات

(مثال ١) أوجد بالسنتيمترات المكعبة سعة إناء يسع ٨١٥٧٦ جراما من الزئبق فى درجة حرارة معينة علما بأن كثافة الزئبق فى تلك الدرجة ١٣,٥٩٦ من الجرامات لكل سنتيمتر مكعب .

لكون كتلة السنتيمتر المكعب من الزئبق ١٣,٥٩٦ من الجرامات ولكون الاناء يسع ٨١٥٧٦ جراما من الزئبق تكون سعته

$$= \frac{٨١٥٧٦}{١٣,٥٩٦} = ٦٠٠٠ \text{ سنتمتر مكعب .}$$

(مثال ٢) ما كتلة متر من سلك نحاسى كثافته ٨ علما بأن طول قطر مقطعه سنتيمتر واحد ؟

مساحة مقطع السلك = ط $(\frac{١}{٢})^٢$ = $\frac{٢٢}{٧} \times \frac{١}{٤} = \frac{١١}{١٤}$ من السنتيمتر المربع .

وحجم السلك = $\frac{١١}{١٤} \times ١٠٠ = \frac{٥٥٠}{٧}$ من السنتيمترات المكعبة .

فينتج أن كتلة السلك

$$= \frac{٥٥٠}{٧} \times ٨ = \frac{٤٤٠٠}{٧} = ٦٢٨ \frac{٤}{٧}$$ من الجرامات .

بند ١٤٦ — الثقــل النــوعى .

الثقل النوعى لجسم هو النسبة بين ثقلى حجمين متساويين منه ومن المـاء .

ومن حيث إن كتلة السنتيمتر المكعب من الماء تساوى واحدا ينتج أن العدد الدال على الثقــل النوعى لجسم هو عين العــدد الدال على كثافته مقــدرة بالجرامات عن السنتيمتر المكعب .

(مثــال ١) الثقل النوعى لزيت البترول يساوى ٠,٨٨ . فاذا كان ثقل الجالون من المـاء ١٠ باوندات . فكم جالونا من زيت البترول تعادل $\frac{١}{٢}$ ٣٨ من الباوندات ؟

وزن الجالون من زيت البترول ٠,٨٨ × ١٠ = ٨,٨ من الباوندات فعدد الجالونات الذى وزنه $\frac{١}{٢}$ ٣٨ من الباوندات هو

$$\frac{٣٨\frac{١}{٢}}{٨\frac{٤}{٥}} = \frac{٣٨٥}{٨٨} = ٤ \frac{٣}{٨}$$ من الجالونات .

(مثــال ٢) قضيب مقطعه المستعرض منتظم وطوله ١٨ سنتيمترا ووزنه ٣٠ جراما . فاذا علم أن ثقله النوعى ٨,٨ وأن وزن السنتيمتر المكعب من المـاء جرام واحد فأوجد مساحة المقطع المستعرض مقدرا بكسر من السنتيمتر المربع .

لتكن ع مساحة المقطع المستعرض فيكون حجم القضيب ١٨ ع من السنتيمترات المكعبة . ولمـا كان ثقــل السنتيمتر المكعب من المـاء جراما واحدا ينتج أن ثقــل القضيب يساوى ٨,٨ × ١٨ ع × ١ وهذا يساوى ٣٠ جراما بالفرض .

إذن ٨,٨ × ١٨ ع × ١ = ٣٠

ومنـــه ع = $\frac{٢٥}{١٣٢}$ من السنتيمتر المربع .

بند ١٤٧ — اذا كانت و رمزا الى ثقل وحدة الحجم من الماء كان ثقل مقدار حجمه ح من مادة ثقلها النوعى ں يساوى

$$و\,ح\,ں$$

ذلك لأن ثقل وحدات من حجم الماء عددها ح يساوى و ح . وثقل ذلك الحجم من المادة يساوى ثقل مقدار من الماء يساويه حجما مضروبا فى الثقل النوعى لتلك المادة . فثقل المادة يساوى و ح ں .

فاذا اعتبرنا القدم المكعبة وحدة الحجم تكون و = ٦٢,٥ ويكون ثقل ح من الأقدام المكعبة من المادة التى ثقلها النوعى ں = ٦٢,٥ ح ں .

واذا اعتبرنا السنتيمتر المكعب وحدة للحجم تكون و = ١ فيكون ثقل ح من السنتيمترات المكعبة من المادة التى ثقلها النوعى ں = ح ں .

بند ١٤٨ — الثقل النوعى لمزيج .

(١) مزيج يتركب من مواد حجومها $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، .... وأثقالها النوعية $ں_{١}$ ، $ں_{٢}$ ، $ں_{٣}$ ، .... أوجد الثقل النوعى له .

لتكن و رمزا الى ثقل وحدة الحجم من الماء فيتضح من البند السابق أن أثقال المواد هى $و\,ح_{١}\,ں_{١}$ ، $و\,ح_{٢}\,ں_{٢}$ ، $و\,ح_{٣}\,ں_{٣}$ ، ....

وأن ثقل المزيج هو

$$و\,(ح_{١}\,ں_{١} + ح_{٢}\,ں_{٢} + ح_{٣}\,ں_{٣} + \ldots\ldots)$$

وحجم المزيج هو $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots$. فاذا كانت ں رمزا الى الثقل النوعى للمزيج

$$يكون\ و\,ں\,(ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots) = و\,(ح_{١}\,ں_{١} + ح_{٢}\,ں_{٢} + ح_{٣}\,ں_{٣} + \ldots)$$

$$ومنه\quad ں = \frac{ح_{١}\,ں_{١} + ح_{٢}\,ں_{٢} + ح_{٣}\,ں_{٣} + \ldots\ldots}{ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots\ldots}$$

(٢) مزيج يتركب من مواد أثقالها $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $و_{٣}$ ، .... وأثقالها النوعية $ں_{١}$ ، $ں_{٢}$ ، $ں_{٣}$ ، .... أوجد الثقل النوعى له .

من الواضح أن حجوم المواد هى :-

$$\frac{و_1}{و\,ں_1} ، \frac{و_2}{و\,ں_2} ، \frac{و_3}{و\,ں_3} ، \ldots$$

وحجم المزيج هو

$$\frac{1}{و}\left(\frac{و_1}{ں_1} + \frac{و_2}{ں_2} + \frac{و_3}{ں_3} + \ldots\right)$$

وثقـل المزيج يسـاوى

$$و_1 + و_2 + و_3 + \ldots$$

فاذا كانت ں رمزا الى الثقل النوعى للمزيج ينتج أن

$$و_1 + و_2 + و_3 + \ldots = و \times \frac{1}{و}\left(\frac{و_1}{ں_1} + \frac{و_2}{ں_2} + \frac{و_3}{ں_3} + \ldots\right) ں$$

ومنـه : $\frac{و_1 + و_2 + و_3 + \ldots}{ں} = \frac{و_1}{ں_1} + \frac{و_2}{ں_2} + \frac{و_3}{ں_3} + \ldots$

(مثـال ١) إذا مزجنا مقدارا من سائل ثقله النوعى ٠,٨ بمقدار من المـاء فكانت النسبة بين الحجمين كنسبة ٣ : ٧ وظهر لنـا أن حجم المزيج تقص عن مجموع حجمى السائلين بنسبة ٢٥ : ٢٤ فما الثقل النوعى للمزيج ؟

هنا $ح_1 = ٣$ ، $ح_2 = ٧$ ، $ں_1 = ٠,٨$ ، $ں_2 = ١$ وحجم المزيج $= \frac{٢٤}{٢٥} \times ١٠$

فاذا رمزنا بالرمز ں الى الثقل النوعى للمزيج ينتج أن

$$\frac{٢٤}{٢٥} \times ١٠ \times ں = ح_1 ں_1 + ح_2 ں_2$$

$$= ٣ \times \frac{٤}{٥} + ٧ \times ١$$

ومنـه $ں = \frac{٤٧}{٤٨}$

(مثـال ٢) الثقل النوعى للذهب ١٩,٢٦ والثقل النوعى للفضة ١٠,٤٧ . ما مقدار الذهب الذى يحتوى عليه مزيج من هذين المعدنين ثقله النوعى ١٦ وثقله ٦٥٠ حبة؟

لتكن $و_1$ ، $و_2$ ثقلى الذهب والفضة ، $ں_1$ ، $ں_2$ ثقليهما النوعيين فيكون

$$ں_1 = ١٩,٢٦ ، ں_2 = ١٠,٤٧ ،$$

$$و_1 + و_2 = ٦٥٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

ولكون الثقل النوعى للمزيج ١٦ نرى أن

$$\frac{و_١}{ث_١} + \frac{و_٢}{ث_٢} = \frac{٦٥٠}{١٦}$$

أو
$$\frac{و_١}{١٩٫٢٦} + \frac{و_٢}{١٠٫٤٧} = \frac{٦٥٠}{١٦} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

فبحل (١) ، (٢) للحصول على قيمتى $و_١$ ، $و_٢$ نجد أن

$و_١$ ثقل الذهب = ٤٩٢٫٢٥ من الحبات

$و_٢$ « الفضة = ١٥٧٫٧٥ «

بند ١٤٩ — إيجاد الضغط على سطح مغموس فى سائل ثقله النوعى معين .

رأينا فى بند (١٤١) أن الضغط على سطح مساحته س قد غمس فى سائل ثقل وحدة حجمه و = و س ع علما بأن ع عمق مركز ثقل السطح .

فاذا اعتبرنا القدم المكعبة وحدة الحجم فثقلها من سائل ثقله النوعى ى يساوى ثقل القدم المكعبة من الماء ى من المرات أى يساوى ٦٢٫٥ × ى من الباوندات .

فالضغط على سطح مساحته س مغموس فى مثل هذا السائل

= ٦٢٫٥ × ى × س × ع من الباوندات .

واذا اعتبرنا السنتيمتر المكعب وحدة للحجم فثقله من السائل هو ى من الجرامات .

فالضغط على السطح الذى مساحته س من السنتيمترات المربعة يساوى

ى س ع من الجرامات .

(مثال ١) ما مقدار الضغط على مستطيل طوله ٨ سنتيمترات وعرضه ٥ سنتيمترات اذا كان أعلى رءوسه على عمق ٤ سنتيمترات وأسفلها على عمق ٦ سنتيمترات فى زئبق ثقله النوعى ١٣٫٦ ؟ قدر الضغط بالجرامات .

مركز ثقل المساحة المغموسة عبارة عن منتصف المستقيم الواصل بين الرأسين الأعلى والأسفل فيكون على عمق ٥ سنتيمترات فى الزئبق . ومن حيث ان الثقل النوعى للزئبق ١٣٫٦ يكون ثقل السنتيمتر المكعب من الزئبق ١٣٫٦ من الجرامات . وعدد السنتيمترات المربعة فى المساحة المغموسة هو ٨ × ٥ أى ٤٠ فالضغط الكلى على المساحة يساوى ١٣٫٦ × ٤٠ × ٥ = ٢٧٢٠ جراما

(مثال ٢) إناءان أسطوانيان متساويا القطرين. وضعا وضعا رأسيا. وفى أحدهما ماء وفى الآخر زئبق. فاذا كان ضغطا الماء والزئبق على قاعدتيهما متساويين فقارن بين الضغطين الكليين على جانبيهما علما بأن الثقل النوعى للزئبق ١٣٫٦ .

نفرض أن ارتفاع الزئبق فى الاناء ا من الأقدام فمن حيث إن الضغطين على القاعدتين متساويان يتضح أن ارتفاع الماء فى الاناء الآخر يساوى ١٣٫٦ ا من الأقدام. ونرمز بالرمز نق الى نصف قطر احدى الأسطوانتين فيكون الضغط على جانب أسطوانة الماء هو ١٣٫٦ ا/٢ × ٢ ط نق × ١٣٫٦ ا × ٦٢٫٥ من الباوندات

والضغط على جانب أسطوانة الزئبق هو

١/٢ × ٢ ط نق × ا × ١٣٫٦ × ٦٢٫٥ من الباوندات.

فنسبة الضغط على جانب أسطوانة الماء الى الضغط على جانب أسطوانة الزئبق كنسبة ١٣٫٦ ا/٢ × ٢ ط نق × ١٣٫٦ × ا × ٦٢٫٥ : ١/٢ × ٢ ط نق × ا × ١٣٫٦ × ٦٢٫٥

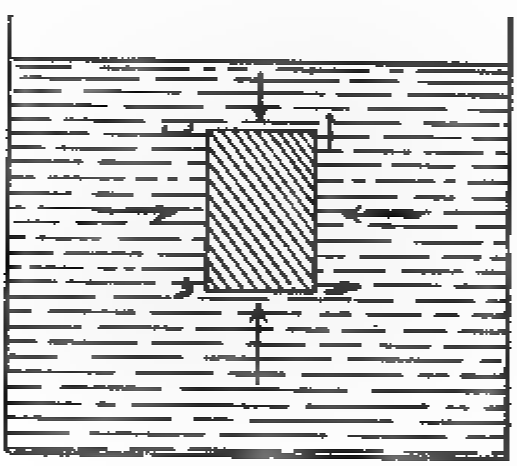
أى كنسبة ١٣٫٦ : ١

أى أن الضغط على جانب أسطوانة الماء يساوى الضغط على جانب أسطوانة الزئبق ١٣٫٦ من المرات.

بند ١٥٠ — قبل أن نشرع فى بيان طريقة إيجاد الثقل النوعى بالتجربة نُثبتُ نظريتين هامتين.

(نظرية ١) اذا غمر جسم فى مائع فان ضغطا يقع عليه من أسفل الى أعلى يساوى ثقل المائعُ المزاح.

ليكن ا ب حـ ء جسما مغمورا فى المائع على عمق ما. فتكون محصلة ضغوط المائع عليه قوة واحدة تؤثر من أسفل الى أعلى وتساوى ثقل المائعُ المزاح. ويظهر ذلك جليا اذا تصورنا أن يستعاض عن الجسم المائعُ الذى حل محله. وفرضنا أن هذا المقدار من المائع يصير صلبا. فان الضغوط الواقعة على الجزء المفروض صلابته من المائع المحيط به هى عين الضغوط



على الجسم ا ب حـ ى . ويكون الجزء المفروض صلابته ساكنا بتأثير قوتين فقط (١) ثقله الى أسفل و (٢) ضغط المائع المحيط به . ولا بد للتوازن من تساوى هاتين القوتين وتضادهما . وينتج أن محصلة ضغوط المائع على الجزء المفروض صلابته قوة واحدة تؤثر من أسفل الى أعلى وتساوى ثقل ذلك الجزء .

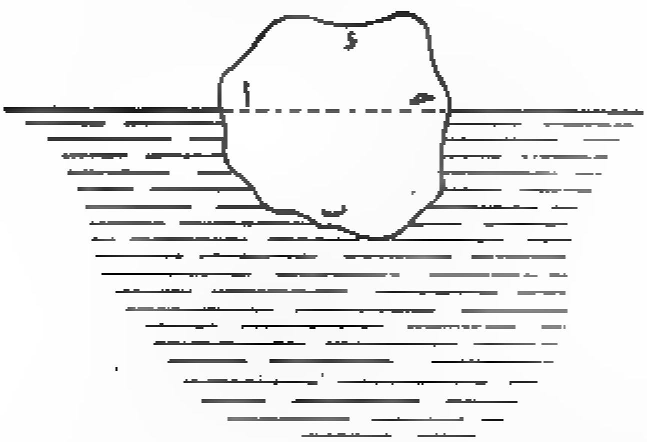
وينتج أيضا أن محصلة ضغوط المائع على الجسم ا ب حـ ى قوة واحدة تؤثر من أسفل الى اعلى وتساوى ثقل المائع الذى حل الجسم محله .

وقد فرضنا فى الشكل السابق أن مقطع الجسم مستطيل ولكن البرهان عام ويشمل أيضا الحالة التى فيها يكون الجسم المغمور غير محدود بسطوح مستوية .

وينتج من ذلك أنه اذا كان الثقل النوعى لجسم يساوى الثقل النوعى للمائع فان الجسم يسكن فى أى وضع داخل المائع . وإذا كان الثقل النوعى لجسم أعظم منه للمائع فان ثقله يكون أكبر من ثقل المائع المزاح فيكون أعظم من الضغط الى أعلى وهو الذى يوقعه المائع المحيط بالجسم . فيحدث أن الجسم يهبط فى المائع . وأما اذا كان الثقل النوعى لجسم أقل منه للمائع فيكون ثقله أقل من ثقل المائع المزاح وينتج أنه يصعد نحو سطح السائل .

وتعرف هذه النظرية بقاعدة ارشميدس (Archimedes) .

(نظرية ٢) اذا طفا جسم فوق سطح سائل وكان جزء منه مغموسا فيه يكون ثقل الجسم مساويا ثقل السائل المزاح . ومركزا ثقلهما على مستقيم رأسى واحد .



ليكن ا ب حـ ى جسما طافيا وجزؤه ا حـ ب مغموسا فى سائل . فببرهان مماثل لبرهان النظرية الأولى يتضح أن محصلة ضغط السائل لجسم تساوى ثقل المائع المزاح ا حـ ب وأن هذه المحصلة لا بد أن تمر بمركز ثقل ا ب حـ . وليس هناك قوة أخرى تؤثر فى الجسم سوى ثقله . فنرى أنه يتزن بتأثير هاتين القوتين وهما ثقله الذى يؤثر رأسيا الى أسفل مارا بمركز ثقله . وضغط السائل الذى يساوى ثقل الجزء المزاح منه ويؤثر رأسيا الى أعلى مارا بمركز ثقل هذا الجزء .

وللتوازن يجب أن يكون ثقل الجسم مساويا ثقل السائل المزاح، وأن يكون المستقيم الواصل بين مركز ثقل الجسم ومركز ثقل السائل المزاح رأسيا .

بند ١٥١ — يمكننا من نظرية (٢) أن تقارن بين الثقل النوعى لجسم طاف على سطح مائع والثقل النوعى لذلك المائع اذا أمكن تعيين حجم الجسم بأكمله وكذا حجم الجزء المغموس فى السائل .

لتكن ح_1 حجم الجسم بأكمله ، ر_1 ثقله النوعى ، ح_2 حجم الجزء المغموس ، ر_2 الثقل النوعى للسائل . فاذا رمزنا بالرمز و الى ثقل وحدة الحجم من الماء يكون ثقل الجسم هو و $\text{ح}_1 \text{ر}_1$ وثقل السائل المزاح هو و $\text{ح}_2 \text{ر}_2$ ولكن هذين المقدارين متساويان . إذن :

$$\text{و}\,\text{ح}_1\,\text{ر}_1 = \text{ح}_2\,\text{ر}_2$$

ومنــه

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} = \frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1}$$

(مثـال ١) عين ثقل مكعب من الخشب طول حرفه قدم واحدة علما بأنه اذا طفا فوق سطح المـاء يكون مغموسا الى عمق $9\frac{1}{2}$ من البوصات ، وعين أيضا ثقله النوعى .

هنا $\text{ر}_2 = 1$ ، $\text{ح}_2 = \frac{9\frac{1}{2}}{12}$ من القدم المكعبة .

$\text{ح}_1 =$ قدما مكعبــة .

فينتج أن $\text{ر}_1 = \frac{9\frac{1}{2}}{12} = \frac{19}{24}$.

ثم أن ثقل القدم المكعبة من الخشب الذى ثقله النوعى $\frac{19}{24}$

$= \frac{19}{24} \times 62{,}5 = 49{,}5$ من الباوندات تقريبا .

(مثـال ٢) الثقل النوعى للرصاص ١١,٤ وللفلين ,٢٤ . فما مقدار الرصاص اللازم وصله بقطعة من الفلين ثقلها ٣ باوندات حتى تغمر فى المـاء ؟

يجب أن يوصل بالفلين من باوندات الرصاص ما يصير به ثقل الرصاص والفلين معا مساويا ثقل مقدار من المـاء حجمه يساوى حجمهما معا .

نرمز بالرمز س الى عدد مايلزم من باوندات الرصاص فيكون ثقل مقدار الماء الذى حجمه يساوى حجم هذا العدد من باوندات الرصاص هو $\frac{س}{١١٫٤}$ من الباوندات .

وثقل مقدار الماء الذى حجمه يساوى حجم ٣ باوندات من الفلين هو $\frac{٣}{٢٤}$ من الباوندات .

فينتج أن ثقل مقدار من الماء حجمه يساوى حجمى الرصاص والفلين هو :

$$\left(\frac{س}{١١٫٤}+\frac{٣}{٠٫٢٤}\right)$$ من الباوندات .

وهذا لابد أن يساوى ثقل الرصاص والفلين معا . أى أنه لابد أن يساوى :

(س + ٣) من الباوندات .

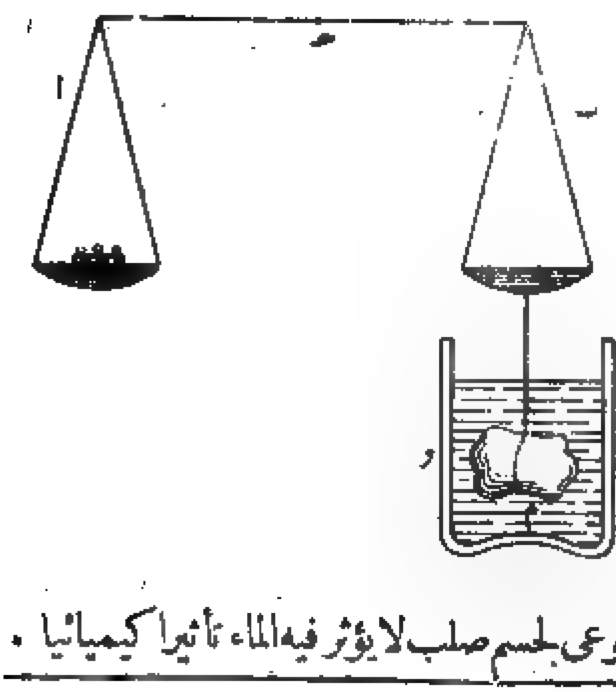
فنحصل على المعادلة :

$$س + ٣ = \frac{س}{١١٫٤} + \frac{٣}{٠٫٢٤}$$

وبحلها نجد أن :

س = ١٠٫٤ من الباوندات تقريبا .

بند ١٥٢ — اذا علق الجسم م فى سائل بخيط رفيع متصل باحدى كفتى الميزان ا ح ب فان الثقل الذى يجب وضعه فى الكفة ا ليحدث التوازن يسمى وزن الجسم م فى السائل . وينتج من نظرية ١ التى ببند (١٥٠) أن وزن الجسم فى هذه الحالة ينقص عن ثقله فى الهواء مقدار وزن السائل المزاح .



بند ١٥٣ — طريقة ايجاد الثقل النوعى لجسم صلب لايؤثر فيه الماء تأثيرا كيميائيا .

(١) ليكن الثقل النوعى للجسم أكبر منه للماء .

نرمز بالرمز و الى وزن الجسم فى الهواء . وبالرمز و١ الى وزنه فى الماء .

فيكون $و - و_1$ ثقل مقدار من الماء حجمه يساوى حجم الجسم . ومن تعريف الثقل النوعى ينتج أن الثقل النوعى للجسم يساوى :

$$\frac{و}{و - و_1}$$

(٢) ليكن الثقل النوعى للجسم أصغر منه للماء .

نصل الجسم بقطعة من مادة كثيفة كالرصاص تسمى غامرا لتغمره فى الماء .

ونرمز بالرمز $و$ الى وزن الجسم فى الهواء .

وبالرمز $س$ الى وزن الغامر فى الهواء .

وبالرمز $و_1$ الى وزن الجسم والغامر فى الماء .

وبالرمز $ص$ الى وزن الغامر فى الماء .

فيكون $و + س$ عبارة عن وزن الجسم والغامر فى الهواء ، $و + س - و_1$ هو وزن مقدار من الماء حجمه يساوى حجم الجسم الغامر ثم أن $س - ص$ عبارة عن وزن مقدار من الماء حجمه يساوى حجم الغامر . فيكون
$و + س - و_1 - (س - ص)$ ، $و - و_1 + ص$ هو وزن مقدار من الماء حجمه يساوى حجم الجسم فالثقل النوعى هو :

$$\frac{و}{و - و_1 + ص}$$

ويمكن الوصول الى هذه النتيجة بطريقة أخرى : من حيث ان $و_1$ وزن الجسم والغامر فى الماء ، $ص$ وزن الغامر فى الماء يكون $و_1 - ص$ وزن الجسم فى الماء ولما كان $ص > و_1$ ينتج أن $و_1 - ص$ كمية سالبة . وهى فى الحقيقة القوة اللازمة لمنع الجسم من الصعود فى الماء . فباعتبار أن $و_1 - ص$ وزن الجسم فى الماء نستنتج أن $و - (و_1 - ص)$ أى $و - و_1 + ص$ هو وزن الماء المزاح بالجسم . أما قانون

إيجاد الثقل النوعى فكما سبق . وليلاحظ أنه ليس من الضرورى معرفة س وهى وزن الغامر فى الهواء . وعند وزن جسم فى الهواء يجب مراعاة أنه يفقد وزنا مساويا لوزن الهواء المزاح . ولما كان وزن مقدار معلوم من الهواء يساوى بالتقريب $\frac{١}{٨٠٠}$ فقط من وزن الماء الذى يساويه حجما . فليس من الضرورى فى المسائل المعتادة لتعيين الثقل النوعى أن نصحح الخطأ الناشئ من مقدار مايزيحه الجسم من الهواء أثناء وزنه فيه . والقانون الوارد فى هذا البند حقيق اذا كان و وزن الجسم فى الفراغ المطلق لأن هذا عبارة عن وزنه فى الهواء مضافا اليه وزن الهواء المزاح .

(مثال ١) الثقل النوعى للذهب ١٩,٤ وللفضة ١٠,٥ فاذا كان وزن سبيكة من هذين المعدنين فى الفراغ المطلق يعادل ٩٧٩ جراما ووزنها فى الماء يعادل ٨٩٠ جراما فأوجد مقدار مافى السبيكة من المعدنين .

الثقل النوعى للسبيكة يساوى :

$$\frac{\text{٩٧٩}}{\text{٩٧٩} - \text{٨٩٠}} = \frac{\text{٩٧٩}}{\text{٨٩}} = \text{١١}$$

فاذا رمزنا بالرمزين $و_١$ ، $و_٢$ الى مقدارى الذهب والفضة ينتج من القانون الوارد فى بند (١٤٨) أن :

$$\frac{و_١}{\text{١٩,٤}} + \frac{و_٢}{\text{١٠,٥}} = \frac{\text{٩٧٩}}{\text{١١}}$$

$$= \text{٨٩}$$

وأيضا $$و_١ + و_٢ = \text{٩٧٩}$$

فبحل هاتين المعادلتين الآتيتين لايجاد المجهولين $و_١$ ، $و_٢$ ينتج أن .

ثقل الذهب $و_١$ = ٧٩ جراما

وثقل الفضة $و_٢$ = ٨٨٢ جراما

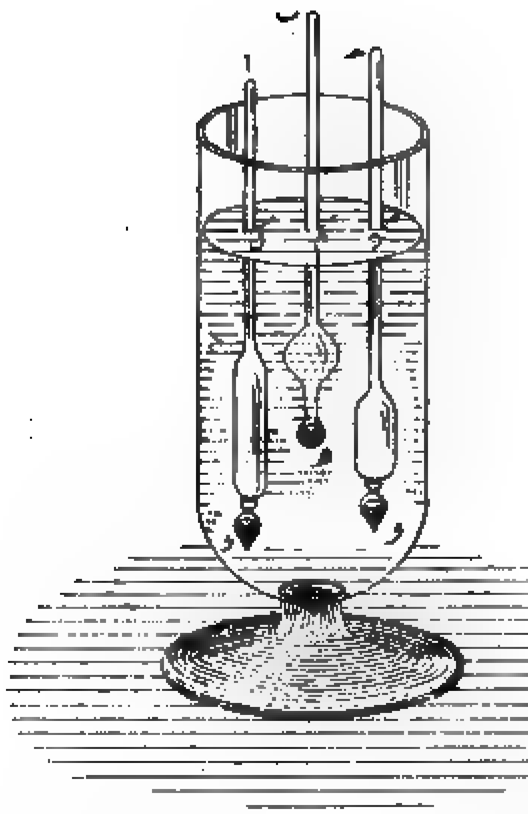
(مثال ٢) جسم وزنه فى الهواء ١٥٠ حبة . واذا غمر فى الماء بغامر فوزنهما معا ٣٦ حبة . أوجد الثقل النوعى للجسم علما بأن وزن الغامر وحده فى الماء ٧٥ حبة

هنا و = ١٥٠ ، و$_1$ = ٣٦ ، ص = ٧٥

فالثقل النوعى يساوى :

$$\frac{١٥٠}{١٥٠-(٣٦-٧٥)} = \frac{١٥٠}{١٨٩} = \frac{٥٠}{٦٣}$$

بند ١٥٤ — آلات تعيين الثقل النوعى .



هناك آلات مختلفة الأشكال لتعيين الثقل النوعى للمواد .

(١) مقياس الثقل النوعى (الايدرومتر) المعتاد .

يستعمل هذا المقياس لتعيين الثقل النوعى لسائل .

وفى هذا الشكل ثلاث صور مختلفة للايدرومتر وهى أ ء ، ب هـ ، حـ و .

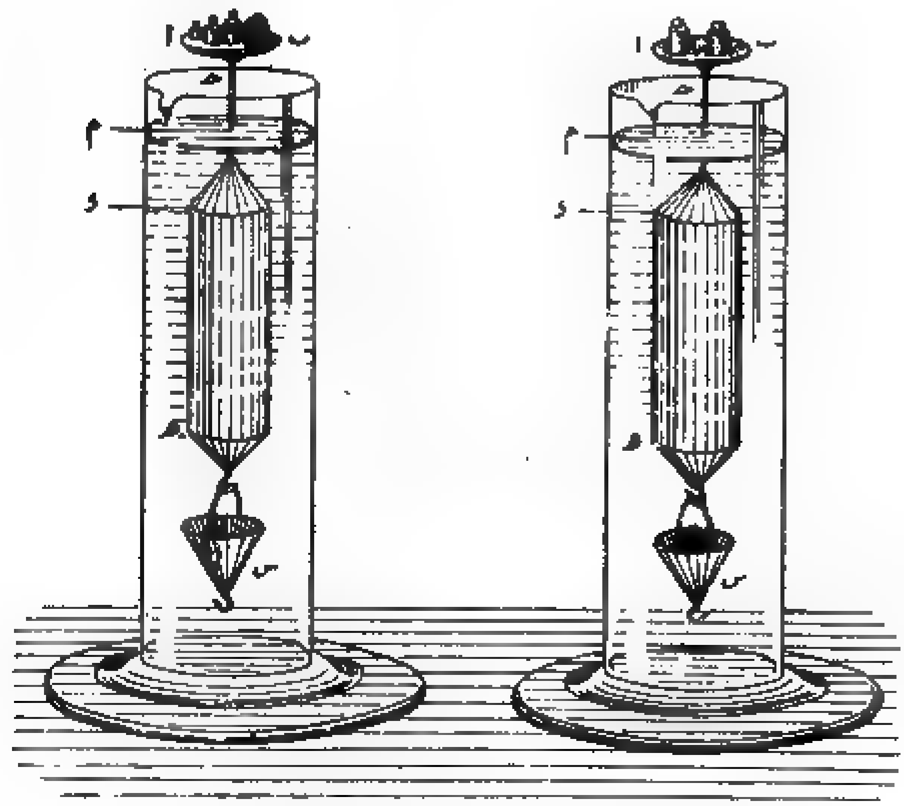
ويتركب المقياس من أسطوانة أو كرة جوفاء من الزجاج متصلة من الأعلى بساق طويلة ضيقة مثل أ$_1$ ، ب$_1$ ، حـ . ومن الأسفل بساق قصيرة منتهية بمنتفخ مثل ء ، هـ$_1$ ، و$_1$. فاذا وضع الجهاز فى سائل فان الزئبق يجعله طافيا فى وضع رأسى .

وتدرج الساق الطويلة حتى إذا وضع الجهاز فى سائل يكون العدد المرقوم إزاء العلامة ل ، م$_1$ ، د التى ينغمس اليها دالا على الثقل النوعى للسائل .

(٢) ايدرومتر نيكلسن (Nicholson)

يتركب هذا الجهاز من أسطوانة جوفاء مثل ء هـ من الشبه تنتهى من الأعلى بساق مثل حـ من الصلب قطرها $\frac{1}{٤}$ من البوصة تقريبا . تحمل الكفة ا ب . وتنتهى

الأسطوانة من الأسفل بخطاف من الحديد يحمل كفة أخرى هى س . وتحفر على الساق حـ علامة فى نقطة مثل م .



ويستعمل الجهاز لايجاد الثقل النوعى لجسم سائلا كان أو صلبا .

(ا) لايجاد الثقل النوعى لسائل بمقياس نيكلسن

نرمز بالرمز و الى ثقل المقياس وبالرمز $و_١$ الى الثقل الذى يجب وضعه فى الكفة ا ب حتى يغمس المقياس الى النقطة م فى الماء . وبالرمز $و_٢$ الى الثقل الذى يجب وضعه فى الكفة ا ب حتى يغمس الى النقطة م فى السائل المراد تعيين ثقله النوعى .

فوزن الماء المزاح = و + $و_١$

ووزن السائل المزاح = و + $و_٢$

ومن حيث ان الحجم المزاح فى كلتا الحالتين واحد يكون الثقل النوعى للسائل

$$\frac{و + و_٢}{و + و_١}$$

(ب) لايجاد الثقل النوعى لجسم صلب بمقياس نيكلسن

ليكن المقياس طافيا فى الماء . ولنرمز بالرمز و الى الثقل الذى يوضع فى الكفة اب حتى يغمس المقياس الى م .

نرفع الثقل و ثم نضع الجسم فى الكفة اب كما فى الشكل الأيسر وليكن $و_1$ الثقل الذى يجب اضافته حتى يغمس المقياس الى م .

نرفع الجسم والثقل $و_1$ ونضع الجسم فى الكفة س كما فى الشكل الأيمن . وليكن $و_2$ الثقل الذى يجب وضعه فى الكفة اب حتى يغمس المقياس الى م .

فنرى مما أجريناه أولا وثانيا أن وزن الجسم فى الهواء يساوى $و - و_1$ ومما أجريناه أولا وثالثا نرى أن وزن الجسم فى الماء يساوى $و - و_2$ (واذا كان الثقل النوعى للجسم أقل من الواحد يكون هذا المقدار سالبا) . فمن ذلك يكون وزن مقدار من الماء حجمه يساوى حجم الجسم هو $و - و_1 - (و - و_2)$ أى $و_2 - و_1$ فالثقل النوعى للجسم هو

$$\frac{\text{وزن الجسم}}{\text{وزن مقدار من الماء يساويه حجما}} = \frac{و - و_1}{و_2 - و_1}$$

(٣) منتفخات الثقل النوعى .

هى منتفخات صغيرة من الزجاج مختلفة الثقل النوعى قد عُيِّن الثقل النوعى لكل منها بالتجربة وكتب مقداره عليه ويوجد بها الثقل النوعى فى النقط المختلفة من سائل غير متجانس الكثافة . فاذا رمينا جملة منها فى سائل غير متجانس الكثافة فان كلا يسكن فى النقطة التى فيها يكون الثقل النوعى للسائل مساويا ثقله النوعى .

(تمارين ٣٠)

(١) وزن ١٠٠٠ بوصة مكعبة من الهواء فى درجة معينة من الحرارة ٠٫٠٤٤٣ من الباوند ووزن ٣٠ بوصة مكعبة من الزئبق ١٤٫٨٨ من الباوندات . ما عدد البوصات المكعبة من الهواء التى كتلتها تساوى كتلة البوصة المكعبة من الزئبق؟

(٢) كتلة ١٠٠٠ بوصة مكعبة من الأكسيجين فى أحوال خاصة تساوى ٠٫٠٥ من الباوند. وكتلة البوصة المكعبة من الزئبق تساوى ٠٫٤٩ من الباوند . فكم بوصة مكعبة من الأكسيجين كتلتها تساوى كتلة البوصة المكعبة من الزئبق ؟

(٣) حجم الجسم ا يساوى ١٣٥ سنتيمترا مكعبا وثقله النوعى يساوى ٤,٤ . وحجم الجسم ب يساوى ١٠٨ من السنتيمترات المكعبة وثقله النوعى يساوى ١٩,٨ قارن بين كتلة ا ، كتلة ب .

(٤) جسم وزنه فى الهواء ٢٥٦ جراما ووزنه فى المـاء ١٩٢ جراما . أوجد حجمه وثقله النوعى .

(٥) وزن جسم فى الهواء ١٠٠ جرام ووزنه فى المـاء النقى ٦٤ جراما ووزنه فى المـاء الملح ٦٠ جراما . أوجد الثقل النوعى للمـاء الملح .

(٦) وُزِنَ دورق فارغ ثم وُزن مملوءا بالمـاء ثم وُزن مملوءا بحامض الأزوتيك فكانت أوزانه فى الأحوال الثلاث ٤,٣٢ ، ١٠,٨٤ ، ١٤,١ من الجرامات . أوجد الثقل النوعى لحامض الأزوتيك .

(٧) أسطوانة ارتفاعها ١٤ سنتيمترا . ونصف قطر قاعدتها ٦ سنتيمترات ملئت بالزئبق . أوجد مقدار الضغط الكلى على قاعدتها . وكذا على سطحها المنحنى اذا كان الثقل النوعى للزئبق يساوى ١٣,٦ .

(٨) اذا مُزج لتران من المـاء بثلاثة لترات من الكحول ولم يحدث نقص فى الحجم الكلى . فأوجد الثقل النوعى للمزيج علما بأن الثقل النوعى للكحول يساوى ٠,٨ .

(٩) إناء على شكل منشور ثلاثى قائم . قاعدته مثلث قائم الزاوية . وطولا ضلعى القائمة ٦ سنتيمترات ، ٩,١٦ من السنتيمترات . وارتفاع المنشور ١٥ سنتيمترا . فاذا ملىء بالكحول الذى ثقله النوعى ٠,٨ . فأوجد مقدار الضغط على القاعدة وكذا على كل من الجوانب .

(١٠) أوجد الضغط الواقع على البوصة المربعة من قعر البحر بمكان عمقه ميل واحد علما بأن الثقل النوعى لمـاء البحر يساوى ١,٠٢٧٥ .

(١١) مُزج سائلان فكان الثقل النوعى للمزيج وسطا عدديا بين ثقليهما النوعيين . ما النسبة بين حجميهما ؟ وما النسبة بين كتلتيهما اذا كان ثقليهما النوعيين ر ، ر َ ؟

(١٢) تكوّن مزيج من أثقال متساوية من ثلاثة سوائل فقسم الى ثلاثة أجزاء ثم أضيف الى كل جزء مقدار من أحد السوائل يساويه فى الثقل فكانت النسبة بين الأثقال النوعية للمزوجات الحادثة كنسبة ٣ : ٤ : ٥ أوجد النسبة بين الأثقال النوعية للسوائل الثلاثة الأصلية .

(١٣) إناء مستطيل القاعدة ارتفاعه ١٢ سنتيمترا وطوله ١٠ سنتيمترات وعرضه ٧ سنتيمترات ملىء الى نصفه بالماء ثم أكمل بزيت ثقله النوعى ٨٦٤ أوجد الضغط الكلى على قاعدة الاناء . وكذا على كل من جوانبه .

(١٤) إناءان اسطوانيان متساويان قد اتصل أحدهما بالآخر بأنبوبة . وملئا بالماء الى ارتفاع قدمين . فاذا أخذ من أحدهما نصف ما فيه من الماء واستعيض عنه مقدار حجمه من زيت ثقله النوعى ٧ فأوجد الارتفاع الذى يبلغه الماء فى كلٍّ منهما بعد اتزانه .

(١٥) وُضع جسم ثقله ١٢ جراما وثقله النوعى ٢,٥ فى إناء أفق القاعدة فيه ماء فغمره الماء تماما . ما مقدار ضغط الجسم لقاعدة الاناء ؟

(١٦) المثلث ا ب حـ يطفو فى وضع رأسى فى سائل بحيث يكون الرأس ب فى سطحه والرأس ا خارجه . برهن على أن الضلع ا حـ رأسى وقارن بين كثافة السائل وكثافة المثلث .

(١٧) هل يفيد التاجر أن تكون صنجات ميزانه عظيمة الكثافة ؟

(١٨) عُلقت قطعة من الفضة ثقلها جرام واحد بخيط وهى منغمسة فى الماء . أوجد شدّ الخيط علما بأن الثقل النوعى للفضة يساوى ١٠,٥ .
اذا كان وزن الاناء والماء معا يساوى ٣٠ جراما . فما الوزن الذى يوازنهما عند ما تعلّق قطعة الفضة فى الماء ؟

(١٩) أوجد المقطع العمودى لأسطوانة طولها ١٢٠ سنتيمترا ووزنها فى الهواء ٢٥٠ جراما ووزنها فى الماء ٢٠٠ جرام .

(٢٠) قضيب منتظم طوله ٢٧ سنتيمتراً وثقله ٣٠ جراما . ما مساحة مقطعه العمودى اذا كان ثقله النوعى ٣,٦ ؟

(٢١) قطعة من سلك نحاسى طولها ٤ أمتار ووزنها ١٧٢٠ جراما فى الهواء ، ١٥٢٠ جراما فى الماء . ما قطرها ؟

(٢٢) أوجد الحجم والكثافة لجسم وزنه ١٣٨ جراما فى الهواء ، ١٠٦ جرامات فى ماء ملح كثافته ١,١ من الجرامات لكل سنتيمتر مكعب .

(٢٣) اذا علق باوند من الحديد و باوند من الرصاص فى الماء . فأى الخيطين أعظم شدا ؟ ما الشد فى كل اذا كان الثقل النوعى للحديد ٩ والثقل النوعى للرصاص ١١ ؟

(٢٤) القوة اللازم ايقاعها الى أسفل على أحد جسمين لابقائه تحت سطح سائل تساوى القوة اللازم ايقاعها الى أعلى على الآخر لمنعه من الهبوط فيه . فاذا كان حجم أولها ١١ سنتيمترا مكعبا وحجم الآخر ٩ سنتيمترات مكعبة وثقل الأول ١٢,١ من الجرامات والثقل النوعى للسائل ٠,٨ . فأوجد الثقلين النوعيين للجسمين .

(٢٥) أسطوانة من حجر ثقله النوعى ٣ وارتفاعها ٦ سنتيمترات ونصف قطرها ٧ سنتيمترات تطفو فوق زئبق ثقله النوعى ١٣,٦ . فما القوة اللازم ايقاعها عليها الى أسفل حتى يغمرها الزئبق ؟

(٢٦) تطفو أسطوانة منتظمة فوق الماء بحيث يكون سنتيمتر واحد من طولها فوق سطحه . واذا طفت فوق سائل آخر ثقله النوعى ١,٥ كان ٣ سنتيمترات من طولها فوق سطحه فما ارتفاعها ؟ وما ثقلها النوعى ؟

(٢٧) ألصقت بوصة مكعبة من الرصاص الذى ثقله النوعى ١١,٤ بقدم مكعبة من الثلج الذى ثقله النوعى ٠,٩٢ . فهل يطفو هذا المركب فوق الماء أو يهبط ؟

(٢٨) جسم كتلته ٥٠ كيلوجراما وثقله النوعى ١,١ يكاد يطفو فوق الماء اذا اتصل به مقدار من الفلين . ما حجم الفلين اللازم لذلك اذا كان ثقله النوعى ٠,٢٤ ؟

(٢٩) أسطوانة من الخشب كتلتها ١٠ كيلو جرامات طفت فوق الماء بحيث كان ثلثا حجمها مغموسين فاذا اتصل بها ٦ كيلو جرامات من معدن كاد المركب يكون مغموسا بأكمله . أوجد الثقلين النوعيين للخشب والمعدن .

(٣٠) طفا مكعب فوق سائل بحيث كان أحد رءوسه تحت السطح . وثلاثة منها منطبقة عليه أثبت أن الثقل النوعى للسائل ٦ أمثال الثقل النوعى للمكعب .

(٣١) اذا طفت قطع من الثلج فوق الماء فذابت شيئا فشيئا . فكيف يتأثر سطح الماء من ذلك ؟

(٣٢) أوجد الثقل النوعى لمادة وزن قطعة منها فى الهواء ٥ جرامات ووزنها فى سائل ٣,٥ من الجرامات علما بأن الثقل النوعى للسائل ٠,٨ .

(٣٣) وُضع مقدار من الحصى كتلته $\frac{١}{٣}$ ١١١ من الباوندات فى إناء سعته قدم مكعبة فكان مقدار الماء اللازم لاكمال ملء الاناء ٥٤٠ بوصة مكعبة . ما كتلة القدم المكعبة من الحجر المركب منه الحصى ؟ وما ثقله النوعى ؟

(٣٤) وزن جسم فى الهواء ١٢٠ جراما . ووزنه فى سائل ثقله النوعى ٠,٩ يساوى ٩٠ جراما . فما ثقله النوعى ؟

(٣٥) وزن قطعة من الخشب ٤ جرامات . ووزن قطعة من الرصاص فى الماء ٤ جرامات ووزن القطعتين معا فى الماء ٣ جرامات . فما الثقل النوعى للخشب ؟

(٣٦) أوجد الثقل النوعى للفلين مما يأتى :

وزن قطعة من الفلين فى الهواء = جرامين .

وزن القطعة والغامر فى الماء = ٤ جرامات .

وزن الغامر فى الماء = ١٢ جراما .

(٣٧) أوجد ثقل الرصاص اللازم وصله بقطعة من الفلين ثقلها ٢٠ كيلو جراما حتى يكاد المركب يطفو فوق الماء علما بأن الثقل النوعى للرصاص ١١,٤ وللفلين ٠,٢٤ .

(٣٨) وزن قطعة من الفلين فى الهواء ١٥ جراما ووزن الغامر فى الماء ٩٠ جراما ووزن الفلين والغامر معا فى الماء ٤٥ جراما . ما الثقل النوعى للفلين ؟

(٣٩) وزن الجسم ا ١٠ جرامات فى الماء ووزن الجسم ب ١٤ جراما فى الهواء ووزنهما معا ٧ جرامات فى الماء فما الثقل النوعى للجسم ب ؟

(٤٠) اذا طفا ديسمتر مكعب من الفلين فوق الماء . فما مقدار الضغط اللازم إيقاعه الى أسفل على الفلين حتى يغمره الماء ؟ (الثقل النوعى للفلين ٠,٢٥)

(٤١) رجل زنته ٧٠ كيلوجراما يكاد يطفو فوق الماء اذا استعان بمقدار من الفلين الذى ثقله النوعى يساوى ٠٫٢٤ . أوجد حجم الفلين بفرض أن الثقل النوعى للرجل ١٫١٢ .

(٤٢) جسم وزنه ا من الجرامات فى المـاء ، ب من الجرامات فى سائل آخر ثقله النوعى س . أوجد وزنه الحقيق وحجمه .

(٤٣) الثقل النوعى لجسم ٦ ووزنه فى الماء ١٨٠ جراما ووزنه فى سائل آخر ١٥٥ جراما . فما الثقل النوعى لهذا السائل ؟

(٤٤) وزن جسم ١٠٠ جرام فى الماء ، ١١٥ جراما فى سائل آخر ثقله النوعى ٠٫٨ فـما ثقل الجسم ؟

(٤٥) كرة من الشبه ثقلها ١٢ جراما وثقلها النوعى ٨ علقت بخيط فى زيت ثقله النوعى ٠٫٩٢ . أوجد شدّ الخيط .

(٤٦) ألصق جسم ثقله ١٠٠ جرام وثقله النوعى ٠٫٨ بقطعة من الرصاص وزنها فى المـاء ٥٠ جراما ثم علق الاثنان فى المـاء بخيط . ماشدّ الخيط ؟

(٤٧) اذا كانت أوزان جسم فى الفراغ وفى عدة سوائل مختلفة هى و ، و١ ، و٢ ، ... الخ فقارن بين الاثقال النوعية لتلك السوائل .

(٤٨) وُضع ايدرومتر فى المـاء وفى السائلين س ، ص فانغمس فيها الى العلامات ا ، ب ، حـ . وكانت ب فى منتصف ا حـ فاذا كان الثقـل النوعى للسائل ص هو ٠٫٩ فـما الثقل النوعى للسائل س ؟

(٤٩) طفا ايدرومتر فوق سائل ثقله النوعى ٠٫٩ فكان طول الجزء الذى فوق السطح أكبر بمقدار ٥ سنتيمترات منه اذا طفا الايدرومتر فوق المـاء . فالى أى نقطة على ساقه ينغمس هذا الأيدرومتر عند ما يوضع فى سائل ثقله النوعى ٠٫٩٥ ؟

الباب الرابع عشر

الغازات

بند ١٥٥ — الغازات .

الغازات موائع لها خصية الانتشار غير المحدود . فلا يمكن حفظها فى الأوانى المفتوحة كما يصنع بالسوائل . وتختلف الغازات عن السوائل أيضا فى قبولها للضغط . ويمكن اعتبار الماء مثالا للسوائل . والهواء المعتاد مثالا للغازات . فالماء يبدى مقاومة عظيمة للضغط (بند ١٣٢) . وأما الهواء فيمكن ضغطه الى أى حد نشاء بايقاع الضغط الكافى عليه .

والغازات نوع من المادة . فهى تتأثر بالقوى . فلها ثقل . وللبرهنة على أن للهواء ثقلا توزن زجاجة مسدودة وهى مملوءة بالهواء . ثم توزن بعد تفريغها منه بمفرغة الهواء . فيوجد أن الوزن فى الحالة الأولى أكبر منه فى الثانية .

وتبلغ كتلة السنتيمتر المكعب من الهواء على سطح الأرض ٠٫٠٠١٢٩٣ من الجرام تقريبا أى $\frac{١}{٨٠٠}$ من الجرام تقريبا .

بند ١٥٦ — ضغط الغاز فى إناء مقفل .

من حيث إن الغاز له ثقل ينتج من قواعد الايدروستاتيكا أن ضغطه لوحدة من السطح يختلف باختلاف نقط السطح . ومن حيث إن ثقل الغاز يسير يغلب عدم الاعتداد بتغير الضغط فى النقط المختلفة من السطح الناشئ من ثقل الغاز . ويعتبر الضغط واحدا فى كل وحدة من السطح .

واذا عرفنا مقدار الضغط على أى وحدة من السطح فهذا ضغط الغاز .

فنقول إن ضغط البخار فى مرجل يساوى كذا (١٠٠ مثلا) من الباوندات على كل بوصة مربعة .

واذا أردنا أن يكون التعبير أدق قلنا إن ضغط البخار فى المرجل عند النقطة التى تخرج منها الأنبوبة الواصلة بين المرجل ومقياس الضغط يساوى ١٠٠ باوند على كل بوصة مربعة .

بند ١٥٧ — ضغط الجو .

نرى فى الجو مثالا لغاز فى إناء غير مقفل ففى هذه الحالة يمنع الغاز من الانتشار غير المحدود بقوة التثاقل التى تجذبه الى سطح الأرض . ومن المحتمل أن ارتفاع الطبقة الجوية لا يتجاوز خمسين ميلا .

ويقدر الضغط الجوى الواقع على سطح الأرض بقوة تساوى ١٥ باوندا تقريبا على البوصة المربعة من أى جسم . وينشأ من ثقل عمود الهواء الذى مقطعه بوصة مربعة ويمتد من سطح الأرض إلى نهاية الطبقة الجوية .

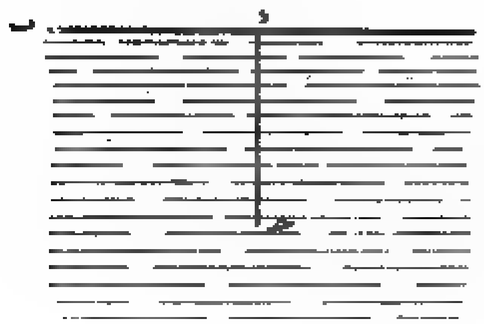
وفى التجارب التى يستعمل فيها ضغوط عظيمة جدا كالتجارب على قبول السوائل للضغط يعتبر الضغط الجوى وحدة . ومن حيث إنه عند سطح الأرض يختلف باختلاف المكان وباختلاف الوقت فى المكان الواحد ينتج أن ضغط الجو وحدة غير ثابتة . وقد اقترح حديثا استعمال ضغط مليون من الداينات على كل سنتيمتر مربع بدل ضغط الجو . وهذا لا يختلف كثيرا عن ضغط ١٥ باوندا على كل بوصة مربعة . وله ميزة أنه لا يتغير مطلقا .

بند ١٥٨ — الضغط عند نقطة فى سائل .

رأينا فى بند (١٣٨) أن الضغط على نقطة مثل حـ فى سائل يساوى ثقل عمود من السائل ارتفاعه حـ ء مرتكز على وحدة السطح .

ورأينا الآن أن الجو يضغط سطح كل جسم الى أسفل وينقل الضغط الجوى الواقع على السطح ا ب من السائل الى جميع أجزاء الجسم بالتساوى .

فاذا أردنا اعتبار تأثير الضغط الجوى يجب أن نضيف مقدار الضغط الجوى الى الضغط الذى أوجدناه بالطريقة الآنفة الذكر .



فلو جعلنا البوصة المربعة وحدة للساحة وكانت ص رمزا الى ضغط الجو على كل بوصة مربعة ، و رمزا الى ثقل البوصة المكعبة من السائل يكون الضغط عند النقطة حـ

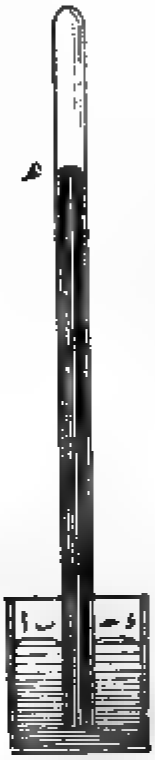
= (ص + و × حـ ء)

على كل بوصة مربعة .

بند ١٥٩ — البارومتر الزئبق .

البارومتر جهاز يستعمل لقياس الضغط الجوى .

لصنع بارومتر زئبق تؤخذ أنبوبة من الزجاج يزيد طولها على ٣٢ بوصة . أحد طرفيها مفتوح والطرف الآخر مسدود ثم تمسك قائمة وتملأ بالزئبق . ثم يسدّ الطرف المفتوح بالأصبع وتنكس فلا يخرج شئ من الزئبق . ثم توضع رأسية فى الآنية ا ب حـ ى المشتملة على زئبق بحيث يكون طرفها المفتوح تحت سطحه .



فعند رفع الاصبع ينخفض الزئبق حتى يثبت سطحه عند نقطة مثل هـ ارتفاعها عن سطح الزئبق ا ب حـ ى فى الآنية من ٢٨ الى ٣١ بوصة . وتكون المسافة فوق هـ فراغا خاليا من الهواء .

العمود ب هـ يوازنه ضغط الجو على سطح الزئبق ا ى الذى ينقل الى مقطع البارومتر ب حـ . ويمكن إيضاح ذلك بالتجربة بوضع الأنبوبة وآنية الزئبق تحت مستودع الآلة المفرغة (بند ١٦٤) وتفريغ الهواء منه . فاذا فرغ ينقص الضغط وينخفض الزئبق فى الأنبوبة على التدريج . واذا أدخلنا الهواء ثانيا فى المستودع يرتفع الزئبق الى ما كان عليه أولا .

ويسمى الارتفاع ب هـ الذى يبلغه الزئبق فى الأنبوبة بارتفاع البارومتر*

بند ١٦٠ — ارتفاع البارومتر يناسب الضغط الجوى .

نفرض فى الشكل السابق أن مساحة المقطع العمودى ب حـ لأنبوبة البارومتر تساوى س من البوصات المربعة ونرمز بالرمز ص الى الضغط الجوى مقدرا بالپاوندات على كل بوصة مربعة من سطح الزئبق الذى فى الآنية .

ضغط الجو على س من البوصات المربعة من سطح الزئبق يساوى ص س من الباوندات وهو الذى يوازن ثقل الزئبق ب هـ .

(*) يعتبر فى الغالب ارتفاع البارومتر ٣٠ بوصة أو ٧٦ سنتيمترا أو ٧٦٠ مليمترا .

وحجم هذا الزئبق يساوى .

$$ب هـ \times س \text{ من البوصات المكعبة .}$$

$$= \frac{ب هـ \times س}{١٢ \times ١٢ \times ١٢} \text{ من الأقدام المكعبة}$$

فاذا رمزنا بالرمز ر الى الثقل النوعى للزئبق يكون ثقل الزئبق ب هـ يساوى.

$$\frac{ب هـ \times س \times ٦٢٫٥ \times ر}{١٢ \times ١٢ \times ١٢} \text{ من الپاوندات .}$$

$$\text{فيكون } ص س = \frac{ب هـ \times س \times ٦٢٫٥ \times ر}{١٢ \times ١٢ \times ١٢}$$

$$\text{ومنه } ص = \frac{ب هـ \times ٦٢٫٥ \times ر}{١٢ \times ١٢ \times ١٢}$$

اذن ص تناسب ب هـ وهو ارتفاع البارومتر .

(مثال ١) أوجد ضغط الجو على البوصة المربعة علما بأن ارتفاع البارومتر يساوى ٣٠ بوصة .

الثقل النوعى للزئبق ١٣٫٦ ووزن القدم المكعبة من الماء ٦٢٫٥ من الپاوندات .

الضغط على كل بوصة مربعة يساوى ثقل عمود من الزئبق مساحة مقطعه العمودى بوصة مربعة وارتفاعه ٣٠ بوصة .

فضغط الجو

$$= \frac{٣٠}{١٢ \times ١٢ \times ١٢} \times ٦٢٫٥ \times ١٣٫٦ \text{ من الپاوندات .}$$

$$= ١٤٫٨ \text{ من الپاوندات تقريبا .}$$

(مثال ٢) ما ارتفاع الماء فى بارومتر مائى حينما يكون ارتفاع الزئبق فى البارومتر الزئبق يساوى ٣٠ بوصة ؟

يرتفع الماء فى البارومتر بحيث يكون ثقل عمود الماء مساويا ثقل عمود من الزئبق ارتفاعه ٣٠ بوصة .

ومن حيث إن الثقل النوعى للزئبق ١٣٫٦ ينتج أن ضغط الجو يوازن عمودا من الماء ارتفاعه يساوى ارتفاع عمود الزئبق ١٣٫٦ من المرات . فارتفاع البارومتر المائى .

= ٣٠ × ١٣٫٦ من البوصات

= ٣٤ قدما .

بند ١٦١ — التغير فى ارتفاع البارومتر .

يتغير ارتفاع البارومتر (أولا) آنا فآنا فى المكان الواحد (ثانيا) بتغير المكان فى الوقت الواحد فاذا أخذنا بارومترا وصعّدنا به على جبل نجد أن ارتفاع الزئبق فيه ينخفض كلما ارتفعنا فنستنتج أنه كلما زاد الارتفاع نقص الضغط الجوى . وذلك لأن الضغط على كل بوصة مربعة فى موضع مايزيد على الضغط فى أى موضع أعلى منه مقدار ثقل العمود الهوائى الذى مقطعه بوصة مربعة . وهو الممتد بين الموضع الأسفل والموضع الأعلى .

و بالتقريب يقال إنه اذا كانت الارتفاعات صغيرة فان انخفاض البارومتر يناسبها فانخفاض البارومتر أثناء ارتفاع المئات الأولى من الأقدام يساوى $\frac{1}{10}$ البوصة تقريبا لكل مائة قدم . وأما الارتفاعات العظيمة فلا تسرى عليها هذه القاعدة مطلقا . وقد وجد بالتجربة والبرهان أنه فى الارتفاعات التى تكوّن متوالية عددية تكون ارتفاعات البارومتر متوالية هندسية أساسها أصغر من الواحد .

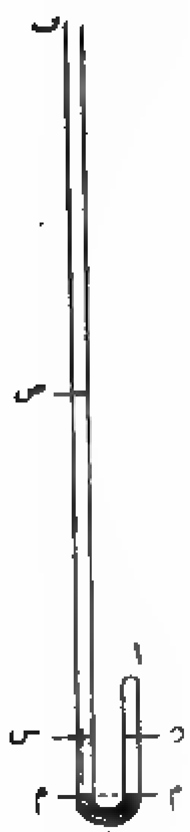
فاذا كانت المواضع الثلاثة ا ، ب ، حـ مختلفة الارتفاع وكان ارتفاع ب متوسطا بين ارتفاعى ا ، حـ نجد أن انخفاض البارومتر بين ب ، حـ أقل منه بين ا ، ب .

وقد استنتج بالبرهان النظرى قانون به يمكن إيجاد الفرق بين ارتفاعى موضعين إذا علم (أولا) ارتفاعا البارومتر فيهما (ثانيا) درجتا حرارة الجو (ثالثا) عجلتا التثاقل فيهما .

بند ١٦٢ — قانون بويل .

يناسب ضغط مقدار معين من غاز حجمه مناسبة عكسية اذا كانت درجة الحرارة ثابتة .
قد كشف هذا القانون للهواء العادى الطبيعيان بويل (Boyle) وماريت (Marriott) فى آخر القرن السابع عشر كل على حدته . الأول فى انجلترا والثانى

فى فرنسا . وقد وجد بعد ذلك جاى لوساك (Gey Lussac) أن القانون يعم جميع الغازات . ولاثبات صحته بالتجربة فى الهواء المعتاد نجرى ما يأتى :



نأخذ الأنبوبة المنحنية المفتوحة الطرفين ا ب ذات الفرعين المستقيمين والمتوازيين ا م ، ب م ثم نصب فيها قليلا من الزئبق حتى يملأ الجزء المنحنى م م ثم نسد الطرف ا فنكون بذلك قد حبسنا فى الفرع م ا مقدارا من الهواء ضغطه يساوى الضغط الجوى الذى يبينه البارومتر فى مكان التجربة وقت إجرائها . نصب بعدئذ زئبقا فى الفرع المفتوح ب حتى يرتفع سطحه فى الفرع المسدود ا م الى النقطة د منتصف المسافة ا م . ونفرض أن ص هى النقطة التى صار فى محاذاتها سطح الزئبق فى الفرع المفتوح حين ارتفع الى د فى الفرع المسدود . وأن س هى النقطة التى على الفرع المفتوح حذاء د .

فمن حيث إن د ، س على استواء واحد يكون الضغط عند د مساويا الضغط عند س .

ولما كان الضغط عند س يساوى ضغط عمود الزئبق س ص مضافا اليه الضغط الجوى الواقع على سطح الزئبق الخالص ص ينتج أن الضغط عند د أى ضغط الهواء المحبوس فى الفرع ا د يساوى مجموع الضغط الجوى وضغط عمود الزئبق س ص .

ويلاحظ أن س ص يساوى ارتفاع البارومتر أى أن الضغط عند كل من س ، د يساوى ضعف الضغط الجوى . وينتج أن الهواء الذى شغل الفراغ ا م بينما كان ضغطه يعادل الضغط الجوى قد شغل الفراغ ا د (وهو نصف ا م) عند ما صار ضغطه يعادل ضعف الضغط الجوى .

ونستنتج من ذلك أنه بتضعيف ضغط مقدار من الهواء يصغر حجمه الى النصف . وكذلك اذا زدنا ضغط الهواء الذى فى الفرع ا م الى ثلاثة أمثال الضغط الجوى فانه يضغط الى ثلث حجمه الأصلى وهكذا . فينتج أن حجم مقدار معين من غاز يناسب ضغطه مناسبة عكسية .

ومن حيث ان حجم كتلة معينة من الغاز يناسب كثافته مناسبة عكسية يمكن وضع القانون على الوجه الآتى :

كثافة مقدار معين من غاز تناسب ضغطه اذا كانت درجة الحرارة ثابتة .

(مثال) إناء سعته ثلاث أقدام مكعبة به هواء ضغطه يعادل ضعف الضغط الجوى . فاذا وصل باناء آخر سعته ١٨ قدما مكعبة به هواء ضغطه يعادل $\frac{١}{٤}$ الضغط الجوى فما ضغط الهواء فى الاناءين ؟

اذا ترك الهواء الذى بالاناء الأول فانتشر حتى صار ضغطه مساويا الضغط الجوى فانه يشغل ٢ × ٣ أى ستة أقدام مكعبة . واذا ضغط الهواء الذى بالاناء الثانى حتى صار ضغطه مساويا الضغط الجوى فانه يشغل $\frac{١}{٤}$ × ١٨ أى $٤\frac{١}{٢}$ من الأقدام المكعبة .

فينتج أن الهواء الذى بالاناءين يشغل (٦ + $٤\frac{١}{٢}$) أى $١٠\frac{١}{٢}$ من الأقدام المكعبة عند مايكون ضغطه مساويا الضغط الجوى . فاذا وصل أحدهما بالآخر فان هذا الهواء يشغل (٣ + ١٨) أى ٢١ قدما مكعبة . فالهواء الذى يشغل $١٠\frac{١}{٢}$ من الأقدام المكعبة عند مايكون ضغطه مساويا الضغط الجوى قد شغل ٢١ قدما فضغط ذلك الهواء هو

$$\frac{١٠\frac{١}{٢}}{٢١} = \frac{١}{٢} \text{ ضغط الجو .}$$

بند ١٦٣ — ارتفاع الجو المتجانس .

من حيث انه كلما زاد الارتفاع نقص ضغط الجو ينتج من الصورة الثانية لقانون بويل أنه كلما زاد الارتفاع نقصت أيضا كثافة الهواء .

وقد يحتاج فى علم الطبيعة الى فرض وجود جو متجانس كثافته تساوى كثافة الهواء فى نقطة معينة وارتفاعه ينشأ منه ضغط مساو للضغط الجوى فى تلك النقطة .

ويطلق على مثل ذلك الجو اسم الجو المتجانس فى تلك النقطة . ويمكن تسهيل فهم كثير من قوانين علم الطبيعة باستعمال ارتفاعه .

ويتعلق ارتفاعه فى مكان معين بدرجة الحرارة لا بالضغط الجوى . لأنا اذا رمزنا بالرمز ع الى ارتفاع الجو المتجانس وبالرمز ص الى ضغط الجو مقدرا بالباوندات على كل بوصة مربعة وبالرمز و الى ثقل البوصة المكعبة من الهواء فى كثافة هواء المكان فان الضغط الذى يوقعه عمود من الهواء ارتفاعه ع على كل بوصة مربعة يساوى ص من الباوندات فيكون

ص = و ع

ومنه ع = ص/و

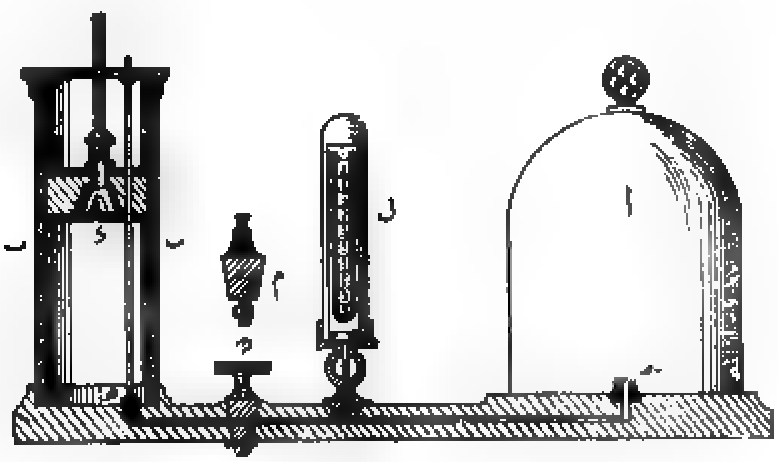
ولما كان و ثقل بوصة مكعبة من الهواء فى المكان المعين ينتج أن و تناسب كثافة الهواء فى ذلك المكان . فيكون ع مناسبا لخارج قسمة الضغط على الكثافة . ومن الصورة الثانية لقانون بويل نعرف أن الضغط يناسب الكثافة . فيكون خارج قسمة الضغط على الكثافة مقدارا ثابتا .

فنستنتج أن ارتفاع الجو المتجانس فى مكان معين لايتعلق بالضغط الجوى فيه ولكنه يزداد كلما زادت درجة الحرارة .

بند ١٦٤ – مفرغة الهواء .

هى آلة لاخراج الهواء من إناء .

يوضع الاناء ا (المسمى بالمستودع) المراد إخراج الهواء منه منكسا فوق قرص فى وسطه فتحة صغيرة تركب عليها قناة واصلة الى اسطوانة مثل ب ب تنفتح بالصمام ء . ويتحرك فى الاسطوانة ب ب مكبس به الصمام هـ الذى ينفتح الى أعلى . أما الجهاز الذى يتحرك به المكبس صعودا وهبوطا فليس مبينا فى الشكل .



ولفهم عمل مفرغة الهواء نفرض أننا ابتدأنا برفع المكبس من قعر الاسطوانة . فالصمام هـ يسد لضغط الجو عليه من الخارج . ويحدث فراغ مطلق بين المكبس وقعر الاسطوانة . فلايقع ضغط على الصمام ء الى أسفل . بل يضغط الى أعلى بهواء القناة حـ ء . فيرفع هذا الصمام ويسرى الهواء من المستودع ا فى القناة حـ ء الى الحيز هـ ء .

ومتى شرعنا فى خفض المكبس نقص حجم الهواء هـ ء فيزيد ضغطه بمقتضى قانون بويل ويصير سريعا أكبر من ضغط الهواء الذى بالمستودع ا فيقفل الصمام ء . ويزيد ضغط الهواء هـ ء الى أن يصير أعظم من الضغط الجوى فيفتح صمام المكبس هـ الى أعلى ويخرج الهواء الذى فى الحيز هـ ء من الصمام هـ حال انخفاض المكبس فكلما رفعنا المكبس مرة امتلأت الاسطوانة بالهواء من المستودع . فاذا انخفض عقب ذلك خرج الهواء . وبادامة تحريك المكبس يقل ضغط الهواء الذى فى المستودع شيئا فشيئا حتى يصير ضعيفا جدا فلا يكفى لفتح الصمام ء . وعلى ذلك يستحيل تفريغ الهواء من المستودع ا تفريغا تاما .

ويسهل مقارنة كثافة الهواء الذى يبقى فى المستودع بعد دفع المكبس مرات معدودة بالكثافة الأصلية .

نرمز بالرمز ح الى سعة الاسطوانة وبالرمز حَ الى سعة المستودع والقناة حـ ء .

فاذا رفع المكبس فان الهواء الذى كان بالمستودع يشغله والاسطوانة معا وقد علمنا من قانون بويل أن كثافة الغاز مناسبة لعكس حجمه . فاذا رمزنا بالرمز ثِ الى الكثافة الأصلية لهواء المستودع وبالرمز $ث_١$ الى الكثافة بعد دفعة واحدة يكون

$$ث_١ : ث = حَ : ح + حَ$$

ومنه $$ث_١ = ث \times \frac{حَ}{ح + حَ}$$

وكذا اذا كانت $ث_٢$ الكثافة بعد الدفعة الثانية الى أعلى يكون

$$ث_٢ = ث_١ \times \frac{حَ}{ح + حَ}$$

$$= ث \left(\frac{حَ}{ح + حَ}\right)^٢$$

وعلى العموم اذا كانت $ث_ن$ رمزا الى الكثافة بعد الدفعة النونية الى أعلى كان

$$ث_ن = ث \left(\frac{حَ}{حَ + ح}\right)^ن$$

(مثال) حجم مستودع مفرغة الهواء خمسة أمثال حجم الاسطوانة وطول دفعة المكبس ١٢ بوصة . أوجد المسافة التي يجب أن يهبطها بعد الدفعة الثالثة حتى ينفتح صمام المكبس الى أعلى .

في هذه الحالة $حَ = ٥$ ، $ح = ١$ فكثافة الهواء في الأسطوانة بعد الدفعة الثالثة

$$ث \left(\frac{٥}{٦}\right)^٣ = ث \times \frac{١٢٥}{٢١٦}$$

علما بأن ث الكثافة الأصلية لهواء المستودع .

ولما كانت الكثافة تناسب الضغط (قانون بويل) ينتج أن ضغط الهواء في الاسطوانة بعد الدفعة الثالثة يساوي $\frac{١٢٥}{٢١٦}$ من الضغط الجوي ويرتفع الصمام اذا هبط المكبس حتى صار ضغط الهواء مساويا الضغط الجوي (لا يعتد بثقل الصمام) .

فاذا رمزنا بالرمز س الى عدد البوصات التي يلزم أن يهبطها المكبس

فحجم الهواء بعد هبوطه مسافة س : حجمه قبل الهبوط $= ١٢ - س : ١٢$.

ونعرف من قانون بويل أن الضغط يناسب الحجم مناسبة عكسية فيكون

$\frac{١٢٥}{٢١٦}$ من الضغط الجوي : الضغط الجوي

$$= ١٢ - س : ١٢$$

ومنه تنتج المعادلة

$$\frac{١٢٥}{٢١٦} : ١ = ١٢ - س : ١٢$$

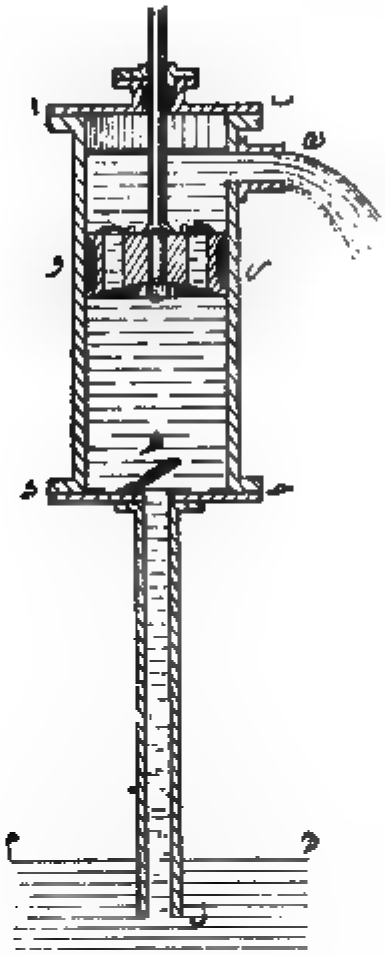
أو

$$\frac{١٢٥}{٢١٦} = \frac{١٢ - س}{١٢}$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $س = ٥ \frac{١}{١٨}$ من البوصات.

بند ١٦٥ – المضخة الماصة .

فى المضخة الماصة مكبس و ر به صمام ينفتح الى أعلى ويتحرك بحيث يلامس مباشرة جوف الاسطوانة ا ب حـ ء التى فى جزئها السفلى ثقب مركب عليه الصمام هـ الذى ينفتح من أسفل الى أعلى . ويصل بين هذا الثقب وماء البئر أنبوبة رأسية هى هـ ل بحيث يكون طرفها ل منغمسا فى الماء م د .

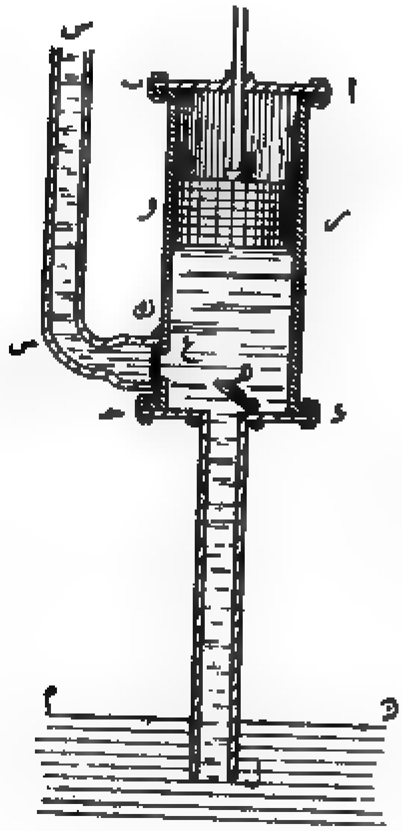


فاذا رفع المكبس و ر الى أعلى فان ضغط الجو على صمام المكبس يقفله ويصير الحيز ء حـ ر و فراغا مطلقا فيفتح الهواء الذى بالأنبوبة هـ ل الصمام هـ . والهواء الذى كان فى أول الأمر شاغلا حجم الأنبوبة هـ ل يشغل الآن حجمها والحيز ء حـ ر و معا . فيكون ضغط الهواء فى الأنبوبة هـ ل قد نقص عن الضغط الجوى . فيحدث أن الضغط الجوى الواقع على سطح ماء البئر يدفع بعض الماء فى الأنبوبة هـ ل الى أعلى واذا هبط المكبس فان الصمام هـ يقفل . وأما صمام المكبس فيفتح فيخرج الهواء من الحيز ء حـ ر و وبادامة ادارة المضخة ينقص ضغط هواء الأنبوبة هـ ل شيئا فشيئا . ويرتفع الماء على التدريج حتى يصل الى هـ . ويكون عمل المضخة الى هذا الحد كعمل مفرغة هوائية . واذا أديرت المضخة بعد ذلك يدخل الماء من الصمام هـ أثناء رفع المكبس الى أعلى ثم يندفع الى أعلى فى الحيز و ر ا ب من صمام المكبس أثناء هبوطه . وبعدئذ يخرج من الفتحة ك فى جانب الاسطوانة .

ومن حيث ان ضغط الجو هو الذى يدفع الماء الى أعلى فى الأنبوبة هـ ل فمن الواضح أنه يجب ألا يكون البعد الرأسى بين ء حـ وسطح ماء البئر م د أكبر من ارتفاع البارومتر المائى (راجع مثال ٢ بند ١٦٠) .

بند ١٦٦ — المضخة الكابسة .

فى هذه المضخة مكبس مصمت هو و ر يتحرك فى جوف الأسطوانة المقفلة ا ب حـ ى بين النقطتين ب ، ك وهناك فتحة ع تحت النقطة ك يخرج منها الماء وقد ركب عليها صمام ينفتح الى الخارج . ولا تختلف هذه المضخة فى غير ذلك عن الماصة .



وطريقة ايضاح عمل هذه المضخة مماثلة للطريقة السابقة فى المضخة الماصة . فبعد ادارتها مدة يدفع ضغط الجو الماء فى الأنبوبة ل هـ من أسفل الى أعلى فاذا رفع المكبس بعد ذلك يرتفع الماء فى الأسطوانة ى حـ ر و واذا دفع الى أسفل فان الصمام هـ يقفل والصمام ع يفتح فيندفع الماء الذى فى ى حـ ر و الى أعلى فى الأنبوبة س ص .

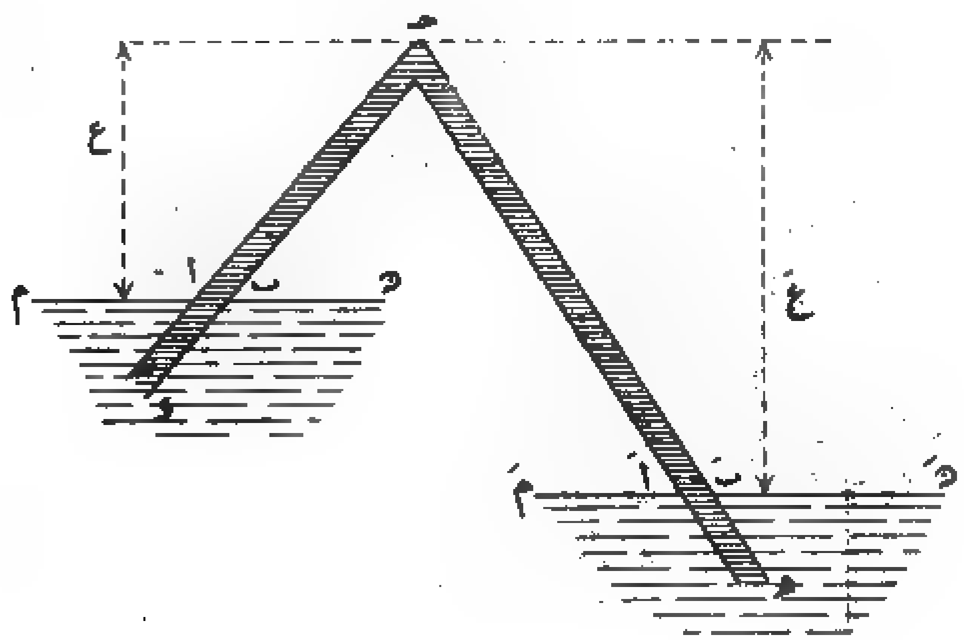
ويعمل الصمام ع على منع رجوع ماء الأنبوبة س ص الى أسطوانة المضخة أثناء رفع المكبس الى أعلى .

بند ١٦٧ — المص .

يتركب المص من الأنبوبة المنحنية ى حـ هـ ذات الشعبتين اللتين احداهما حـ هـ أطول كثيرا من الأخرى ى حـ . ويستعمل فى نقل سائل من اناء الى آخر . فيملأ منه وتسد فتحتاه ى ، هـ ثم يوضع بحيث يكون طرف شعبته القصيرة ى مغموسا فى السائل م د وتكون شعبته الطويلة خارج الاناء ثم يفتح الطرفان ى ، هـ فيسرى تيار من السائل فى المص ويخرج من هـ .

ويتعلق عمل المص بالضغط الجوى ولبيان ذلك نتأمل فى مقطع الأنبوبة عند أعلى نقطة منها حـ . وننظر فى القوى التى تؤثر فى حـ فى الاتجاهين حـ هـ ، حـ ى بينما يكون طرفاها ى ، هـ مفتوحين . أما الضغط فى الاتجاه حـ هـ فيعادل ضغط الجو

الواقع على سطح السائل م د (وهو الذى ينقل فى السائل الى ﺣ) مطروحا منه ثقل عمود من السائل ارتفاعه يساوى ع وهو ارتفاع ﺣ عن السطح م د



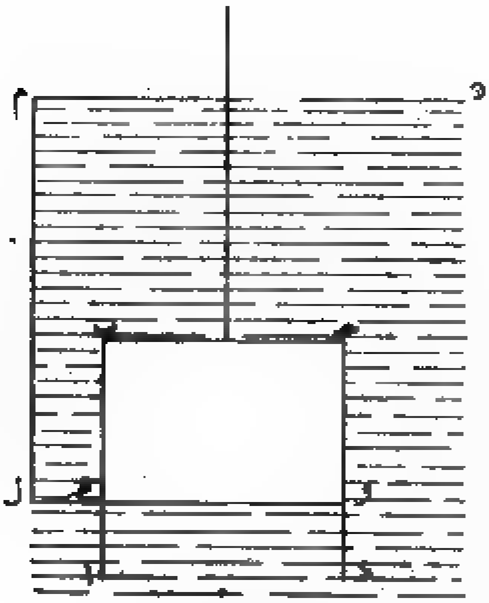
وأما الضغط عند ﺣ فى الاتجاه ﺣ ء فيعادل ضغط الجو الواقع على السائل فى الطرف ﻫ (وهو الذى ينقل فى السائل الى ﺣ) مطروحا منه ثقل عمود من السائل ارتفاعه يساوى عَ وهو ارتفاع ﺣ عن السطح مَ دَ .

فاذا كان ﻑ رمزا الى ارتفاع البارومتر المملوء من ذلك السائل يكون الضغط فى الاتجاه ﺣ ﻫ هو ماينشأ من عمود من السائل ارتفاعه ﻑ ـ ع والضغط فى الاتجاه ﺣ ء هو ماينشأ من عمود منه ارتفاعه ﻑ ـ عَ . فينتج أن الضغط فى الاتجاه ﺣ ﻫ يزيد على الضغط فى الاتجاه ﺣ ء عمودا من السائل ارتفاعه ﻑ ـ ع ـ (ﻑ ـ عَ) أى عَ ـ ع . فيجرى السائل من ﺣ فى الجزء ﺣ ﻫ ويدفع الضغط الجوى الواقع على السطح م د السائل فى الجزء ء ﺣ ليحل محله . وبذا يجرى باستمرار من ء الى ﻫ ولا يزال المص عاملا مادام عَ أكبر من ع أى مادام السطح مَ دَ منخفضا عن السطح م د .

وواضح أن المص يبطل عمله تماما اذا كان ع أكبر من ﻑ أى اذا كان ارتفاع ﺣ عن م د أكبر من ارتفاع البارومتر المملوء بالسائل .

بند ١٦٨ — الناقوس الغواص .

الناقوس الغواص هو اناء كبير مثل ا ب حـ ء مصنوع من الحديد ومسدود طرفه الأعلى ب حـ وكذا جانباه ا ب ، حـ ء ولكن طرفه الأسفل مفتوح .



فاذا أسقط فى الماء فان الهواء الذى به يعمل على طرد الماء . وعلى أى عمق يكون الهواء الذى به عرضة لضغط الماء وبذلك ينضغط . وكلما هبط زاد ضغط الماء . فعلى مقتضى قانون بويل ينقص حجم الهواء الذى به .

نفرض أن الناقوس مغمور بحيث يكون سطح الماء هـ و على عمق ل م فيكون الضغط الواقع على الهواء الذى به هو الضغط الناشئ من العمق ل م من السائل مضافا اليه ضغط الجو على سطح الماء . فاذا رمزنا بالرمز ع الى ارتفاع البارومتر المائى أمكن اعتبار أن الضغط الواقع على الهواء الذى بالناقوس يساوى عمودا من الماء ارتفاعه (ل م + ع) . ولما كان الضغط الواقع على هواء الناقوس قبل غمسه يساوى عمودا من الماء ارتفاعه ع ينتج من قانون بويل أن :

$$\frac{\text{حجم الهواء فى الناقوس على عمق ل م}}{\text{حجم الناقوس}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل م} + \text{ع}} \cdot$$

(تمارين ٣١)

(١) اذا اعتبر أن الضغط الجوى يساوى مليونا من الداينات على كل سنتيمتر مربع فأوجد الشغل المبذول لمقاومة الضغط الجوى حين يسحب مكبس أسطوانة حتى يكون وراءه فضاء خال من الهواء حجمه ٢٤٠ سنتيمترا مكعبا .

(٢) اذا علم أن الثقل النوعى للزئبق ١٣٫٦ وأن ارتفاع البارومتر الزئبق ٢٩ بوصة فأوجد ارتفاع بارومتر الزيت علما بأن الثقل النوعى للزيت ٠٫٨٤٥ .

(٣) ملئت أنبوبة ماء ثم غمس طرفها المفتوح فى المـاء بحيث كان الجزء الأعلى منها مرتفعا عن سطح الماء بقدر $\frac{1}{2}$ ٨ من الأقدام فما ضغط الماء على الجزء الأعلى من الأنبوبة ؟

(٤) اذا اعتبر أن الضغط الجوى ١٥ باوندا على كل بوصـة مربعة وأن ثقل القـدم المكعبة من المـاء $\frac{1}{2}$ ٦٢ من الباوندات فأوجد الضـغط على قعر حوض مملوء بالمـاء عمقه قدمان علما بأن مساحته ١٨ قدما مربعة .

(٥) أنبوبة بارومتر ارتفاعها فوق سطح الزئبق يساوى ا وقد دخلها مقدار من الهواء فصـعد الى الفضاء فوق الزئبق حتى صار ارتفاع الزئبق س مع أن ارتفاع البارومتر الصحيح ص . ما الارتفـاع الحقيقى للبارومتر عنـد ما يكون ارتفاع الزئبق فى الأنبوبة سَ ؟

(٦) حبس مقدار من الهواء فوق الزئبق فى أنبوبة مدرجة فكان حجمه ٢٠ سنتيمترا مكعبا عند ما ارتفع الزئبق فى الأنبوبة ٤٦ سنتيمترا عن سطحه فى الطست ونقص حجمه الى ٩ سـنتيمترات مكعبة عند ما ارتفع الزئبق فى الأنبوبة عنـه فى الطست بمقدار ١٠٫٨ من السنتيمترات . ما الارتفاع الصحيح للبارومتر الزئبق فى ذلك الوقت ؟

(٧) صُب مقـدار من الزئبق فى أنبوبة ذات فرعين رأسيين ثم سد أحد طرفيها فكان طول ما شغله الهواء من ذلك الفرع ١٠ بوصات . ثم وضـعت الأنبوبة فى مسـتودع مفرغة الهواء وأديرت المفرغة حتى صار طول الهواء فى الفـرع المسدود ١٢ بوصة أوجد ضغط الهواء فى كل من المسـتودع والفرع المسدود علما بأن الضغط الجوى يساوى ٣٠ بوصة من الزئبق .

(٨) أنبوبة منحنية مسدود أحد طرفيها بها زئبق يبلغ ارتفاعا واحدا فى فرعيها الرأسيين . ما الضغط الذى يجب أن يوقع على سطح الزئبق فى الفرع المفتوح ليشغل الهواء فى الفرع المسدود ثلث حجمه الأصلى فقط ويكون الفرق بين ارتفاعى سطحى الزئبق ٦ بوصات ؟ قدر الجواب بدلالة الضغط الجوى الذى يساوى ٣٠ سنتيمترا من الزئبـق .

(٩) أنبوبة طولها ١٧ بوصة مسدود طرفها الأعلى . وضعت وضعا رأسيا فى حوض به زئبق فارتفع سطح الزئبق الخارجى الى منتصفها وزاد ارتفاع الزئبق فيها على ذلك ٦ بوصات . فالى أى حدّ ترفع حتى يتمدّد الهواء الذى بها بمقدار نصف بوصة ؟

(١٠) صعدت فقاعة من الهواء من عمق ٢٦٠ مترا فى البحر وقطرها بوصة واحدة . ما حجمها عند ما تصل الى السطح باعتبار أن ارتفاع البارومتر ٧٦٠ مليمترا وأن الثقلين النوعيين للماء الملح والزئبق هما ١,٠٢ ، ١٣,٦ ؟

(١١) وزن الهواء الذى يسعه اناء مفتوح جرام واحد وذلك عند ما يكون ارتفاع البارومتر ٧٥٠ مليمترا . فاذا أخذ هذا الإناء الى مكان فيه ارتفاع البارومتر ٧٠٠ مليمتر فما وزن الهواء الذى يسعه الإناء فى هذه الحالة ؟

(١٢) أسطوانة بها مكبس يعمل بسهولة ولا يمر منه الهواء . فاذا كان على مسافة قدم واحدة من قاعدتها بلغ ارتفاع البارومتر المائى ٣٣ قدما . فاذا غمست الأسطوانة ببطء الى عمق ٤٤ قدما فى الماء فماذا تؤول اليه المسافة بين المكبس والقاعدة ؟

(١٣) ارتفاع الزئبق فى بارومتر ٣٠ بوصة والفضاء الذى فوقه خال من الهواء .

فاذا دخل ربع بوصة مكعبة من الهواء فيها هبط الزئبق ٤ بوصات . ماذا كان حجم الفضاء الخالى من الهواء ؟ علما بأن مساحة المقطع العمودى للانبوبة تساوى ربع البوصة المربعة .

(١٤) أنبوبة منتظمة القطر مسدود أحد طرفيها طولها يساوى ارتفاع البارومتر . وضعت وضعا رأسيا فى حوض به زئبق فالى أى عمق يدفع طرفها الأسفل المفتوح حتى يرتفع الزئبق فيها الى ربع طولها من الأسفل ؟

(١٥) ضغط الهواء فى مستودع مفرغة يعادل ٣٠ بوصة من الزئبق . وبعد بضع دفعات صار يعادل ٢٧ بوصة . ما مقدار الجزء الذى أخرج من الهواء ؟

(١٦) ارتفاع الزئبق فى بارومتر ٣٠ بوصة وطول الفضاء فوقه ٧ بوصات .

فاذا دخل سنتيمتر مكعب من الهواء فى الأنبوبة فكم بوصة يهبطها الزئبق باعتبار أن مساحة المقطع العمودي للأنبوبة بوصة مربعة ؟

(١٧) اذا شرعنا فى تفريغ إناء من الماء بالمص فماذا ينشأ من ثقب المص ثقبا صغيرا فى أعلى نقطة ؟

(١٨) اذا كانت مساحة المكبس فى مضخة كابسة ٤ بوصات مربعة . فبأى قوة يدفع الى أسفل حتى يقذف ماء الى حوض مرتفع عنه بمسافة ٨٠ قدما ؟

(١٩) القدم الطولية من أسطوانة مضخة ماصة تسع من الماء ١٠ باوندات .
فاذا كان طول دفعة المكبس ٨ بوصات وكانت فوهة المضخة مرتفعة عن سطح الماء فى البئر بمسافة ٢٤ قدما . فما مقدار الشغل المبذول فى كل دفعة مقدرا بالقدم — باوندات ؟

(٢٠) أدلى ناقوس غواص ارتفاعه $\frac{1}{2}$ ٧ من الأقدام فى ماء حتى صار أعلاه على عمق $\frac{1}{2}$ ٧ من الأقدام . ما الارتفاع الذى يبلغه الماء فى الناقوس علما بأن ارتفاع البارومتر المائى ٣٢ قدما ؟

(٢١) إذا نقص الضغط فى مستودع مفرغة الى $\frac{1}{2}$ الضغط الجوى بعد ٤ دفعات . فماذا يؤول اليه بعد ٦ دفعات ؟

(٢٢) وضع بارومتر فى مستودع مفرغة وكان ارتفاعه ٣٠ بوصة فصار ٢٠ بوصة بعد دفعة واحدة . فماذا يؤول اليه بعد ٣ دفعات ؟

(٢٣) وضع بارومتر فى ناقوس غواص تحت سطح الماء فزاد ارتفاعه ١٨ بوصة . ما العمق الذى بلغه الناقوس علما بأن الثقل النوعى للزئبق ١٣,٦ ؟

(٢٤) حجم اسطوانة مفرغة $\frac{1}{8}$ حجم المستودع . فاذا كان ضغط الهواء فيه يعادل ٧٦٥,٤٥ من المليمترات من الزئبق . فماذا يؤول اليه الضغط بعد دفع المكبس ثلاث مرات ؟

ذيـــــــل

بند ١٦٩ — حل المسائل بطريقة الرسم .

يجد الطالب تمرينا مفيـدا فى حل المسائل التى تتضمن متوازى الأضلاع للسرع بالرسم . وقد أشرنا الى هـذا فى صفحة (٢٧) اذ أرشـدناه الى استعمال منقلة لرسم الزوايا . ويمكن فى كثير من الأحوال رسم الزوايا بعمليات هندسية رسما متقنا بمسطرة وفرجار ومقياس مقسم الى بوصات ومليمترات لا غير ذلك من الآلات . فمثلا لايجاد محصلة مركبتين مقدار إحداهما ٣ ومقدار الأخرى ٥ والزاوية بينهما ٦٠° نرسم مثلثا متساوى الأضلاع ونعمد الى إحدى زواياه ونأخذ على ضلعيها الطولين م ا ، م ب بحيث يساويان ٣ وحدات ، ٥ وحدات (بوصات أو مليمترات) ثم نكمل متوازى الأضلاع م ا خ ب ونصل م حـ فان كان الرسم محكما وجدنا أن طول م حـ يساوى ٧ وحدات (بوصات أو مليمترات) بالضبط وبذا تكون محصلة المركبتين ٧ وهى القيمة التى تنتج من استعمال القانون .

وقد لايحصل على نتائج مضبوطة ضبطا تاما بالرسم . ولكنه اذا ضبط فقد لايتجاوز ١ ٪ من النتيجة الحقيقية فى أى حال . وينشأ الخطأ على الخصوص من عدم الدقة فى طرق رسم الزوايا . ومن السهل اتقان رسم الزاوية القائمـة وكذلك رسم زاوية ٦٠° وهى زاوية المثلث المتساوى الأضلاع وزاوية ١٢٠° لأنها المكملة لزاوية ٦٠° ويحصل على زاوية ٤٥° بتنصيف الزاوية القائمـة . ويسهل حينئذ رسم زاوية ١٣٥° لأنهـا المكملة لزاوية ٤٥° وبتنصيف الزاوية ٤٥° يحصـل على زاوية $\frac{1}{2}$ ٢٢° وهـكذا . وبتنصيف زاوية ٦٠° يحصـل على زاوية ٣٠° . فيسهل ايجاد الزاوية ١٥٠° لأنهـا تكملها . وبتنصيف زاوية ٣٠° يحصل على زاوية ١٥° وهكذا .

(تمـاريـن ٣٢)

(١) أوجد محصلة المركبتين المعينتين فى كل من الاحوال الآتية :

(١) ١٥ ، ١٦ والزاوية بينهما ٩٠°	(٥) ١٧ ، ١٨ والزاوية بينهما ١٥٠°
(٢) ١٧ ، ١٨ » » ٦٠°	(٦) ١١ ، ١٣ » » ٦٠°
(٣) ٢١ ، ٢٣ » » ٤٥°	(٧) ٤٧ ، ٩١ » » ١٣٥°
(٤) ٢٥ ، ٢٧ » » ٣٠°	

(٢) أوجد محصلة المركبتين المعينتين فى كل من الأحوال الآتية بالرسم المضبوط بحيث يكون الجواب مقربا الى رقم عشري واحد :

(١) ٧ ، ٨ والزاوية بينهما ٩٠°
(٢) ٩ ، ١٠ » » ٤٥°
(٣) ١٥ ، ١٦ » » ٣٠°
(٤) ١٩ ، ٢١ » » ٦٠°
(٥) ٣ ، ٥ » » ٦٠°
(٦) ٩٩ ، ٢٠ » » ٩٠°
(٧) ١٥ ، ٢٣ » » ١٢٠°

(٨) ١٧ ، ١٩ والزاوية بينهما ١٥٠°
(٩) ٢٥ ، ٢٧ » » ١٣٥°
(١٠) ١٠ ، ١٣ » » ١٥°
(١١) ١٢ ، ١٧ » » ٧½°
(١٢) ١٥ ، ٢٩ » » ٢٢½°
(١٣) ٢٥ ، ٣١ » » ١٦٥°

(٣) قد عين فى كل من الأحوال الآتية إحدى مركبتين والزوايا بينهما وبين المحصلة أوجد المركبة الأخرى بالرسم المضبوط :

(١) المحصلة ١٨ والمركبة ١٧ والزاوية ٣٠°
(٢) » ١٩ » ٢٣ » ٦٠°
(٣) » ٢٣ » ٢٥ » ٩٠°
(٤) » ٢٩ » ٤٧ » ١٥٠°
(٥) » ٤١ » ٥١ » ١٢٠°
(٦) » ٤٣ » ٥٥ » ٤٥°
(٧) » ١١ » ١١ » ٧½°
(٨) » ١٧ » ١٩ » ١٥°

(٤) ربط طرفا خيط فى النقطتين ا ، ب على مستقيم أفقى ثم عُلّق من نقطة حـ على الخيط كتلة ١٠٠ باوند . فاذا علم فى كل من الأحوال الآتيـة أطوال ا ب ، ب حـ ، حـ ا فأوجد (بنـد ٤٩) بالرسم المضبوط الشدّ فى كل من جزأى الخيط ا حـ ، حـ ب .

(١) ا ب = ب حـ = حـ ا = ١٢ قدما .

(٢) ا ب = ١٢ قدما ، ب حـ = حـ ا = ١٣ قدما ،

(٣) اب = ١٥ قدما ، ب حـ = ٨ أقدام ، حـ ا = ٩ أقدام .

(٤) اب = ١٣ » ، ب حـ = ١٤ قدما ، حـ ا = ١٥ قدما .

(٥) اب = ٨ أقدام ، ب حـ = ٧ أقدام ، حـ ا = ٩ أقدام .

(٥) علقت كتلة ٥ باوندات من طرف الخيط ا ب المثبت طرفه الآخر في النقطة ا ثم ربط في الكتلة خيط آخر وشد بقوة أفقية قدرها ق . أوجد بالرسم (بند ٤٩) قيمة ق والشد في الخيط الأول ا ب عند ما يميل على الخط الرأسي بزاوية قدرها :

(١) $\frac{1}{2}$ ٧° ، (٤) ٣٠° ، (٧) $\frac{1}{2}$ ٦٧°

، (٢) ١٥° ، (٥) ٤٥° ، (٨) ٧٥°

، (٣) $\frac{1}{2}$ ٢٢° ، (٦) ٦٠° ، (٩) $\frac{1}{2}$ ٨٢°

بند ١٧٠ — مقياس المرونة أو معاملها .

مرونة الجسم عبارة عن مقاومته للتغير في شكله أو حجمه . واذا تغير هذا أو ذاك فان مقدار التغير يسمى بالاجهاد . وتسمى القوة التي تحدث الاجهاد بالانفعال . ويمكن اجهاد جسم صلب بوسائل كثيرة . منها المط والضغط واللي والحني . وقد دلت التجارب على أن الاجهاد الحادث يكون مناسبا للانفعال لدرجة محدودة فاذا ضوعف الانفعال ضوعف الاجهاد واذا نقص الانفعال الى النصف نقص الاجهاد كذلك وهكذا .

معامل المرونة لجسم في حالة اجهاد معينة عبارة عن العدد الذي يدل على مقاومة الجسم لهذا الاجهاد . وتكون قيمته في كل حالة من أحوال الاجهاد مساوية للكسر

$$\frac{\text{الانفعال}}{\text{الاجهاد}}$$

مقياس ينج للمرونة (Young) — هو العدد الدال على مقاومة سلك أو قضيب للاجهاد الحادث من مطه . وينشأ الانفعال في هذه الحالة من تعليق ثقل من أحد طرفي السلك أما الطرف الآخر فيثبت في نقطة ثابتة . وليس الاجهاد هنا عبارة عن مط السلك

بأ كمله ولكنه المط فى كل وحدة من طوله أى المط بأ كمله مقسوما على الطول الأصلى . ثم يقسم الانفعال على الاجهاد فالخارج مقياس ينج لمرونة السلك .

(مثال) عُلق ثقل قدره ٣٠ باوندا من طرف سلك طوله ٢٥ قدما فمُط بمقدار $١\frac{١}{٢}$ من البوصات فما مقياس ينج لمرونته ؟

الانفعال = ٣٠ باوندا

والاجهاد = $\frac{١\frac{١}{٢}}{١٢} \div ٢٥ = \frac{١}{٢٠٠}$

فمقياس ينج = $٣٠ \div \frac{١}{٢٠٠} = ٦٠٠٠$

بند ١٧١ — طاقة الدوران .

اذا دار جسم حول محور فان طاقة الدوران تساوى

$$\frac{١}{٢}\,\text{ے}^{٢}\,\text{ك}\,\text{ں}^{٢}$$

علما بأن ے رمز الى سرعة الجسم الزاوية حول المحور ، ك ں عزم قصوره بالنسبة للمحور المعين .

ويمكن البرهنة على ذلك كما يأتى :

نتصور انقسام الجسم الى نقط مادية كتلها $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، $\text{ك}_{٣}$ ، .... وأبعادها عن المحور $\text{ا}_{١}$ ، $\text{ا}_{٢}$ ، $\text{ا}_{٣}$ ، .... فسرع تلك النقط (بند ٩١) هى $\text{ا}_{١}\text{ے}$ ، $\text{ا}_{٢}\text{ے}$ ، $\text{ا}_{٣}\text{ے}$ ، .... وطاقات حركتها (بند ١٠٧) هى $\frac{١}{٢}\text{ك}_{١}(\text{ا}_{١}\text{ے})^{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\text{ك}_{٢}(\text{ا}_{٢}\text{ے})^{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\text{ك}_{٣}(\text{ا}_{٣}\text{ے})^{٢}$ ، .... فطاقة الحركة الكلية للجسم هى :

$$\frac{١}{٢}\text{ك}_{١}(\text{ا}_{١}\text{ے})^{٢} + \frac{١}{٢}\text{ك}_{٢}(\text{ا}_{٢}\text{ے})^{٢} + \frac{١}{٢}\text{ك}_{٣}(\text{ا}_{٣}\text{ے})^{٢} + \dots$$

أى $$\frac{١}{٢}\text{ك}_{١}\text{ا}_{١}^{٢}\text{ے}^{٢} + \frac{١}{٢}\text{ك}_{٢}\text{ا}_{٢}^{٢}\text{ے}^{٢} + \frac{١}{٢}\text{ك}_{٣}\text{ا}_{٣}^{٢}\text{ے}^{٢} + \dots$$

أى $$\frac{١}{٢}\text{ے}^{٢}(\text{ك}_{١}\text{ا}_{١}^{٢} + \text{ك}_{٢}\text{ا}_{٢}^{٢} + \text{ك}_{٣}\text{ا}_{٣}^{٢} + \dots)$$

ويدل المقدار الذى بين القوسين على مجموع كل حواصل الضرب الناتجة من ضرب كتلة كل نقطة مادية فى مربع بعدها عن المحور . وبمقتضى (بند ٩٨) يكون هذا المجموع عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور ومن حيث إن ك مر٢ رمز لعزم القصور ينتج أن طاقة الدوران الكلية للجسم = ١/٢ ـــ٢ ك مر٢

واذا كانت ك مقـدرة بالپاوندات ، مر بالأقدام فان هذا المقدار يدل على الطاقة بالقدم ــ پاوندالات . واذا كانت ك مقدرة بالجـرامات ، مر بالسنتيمترات فان هذا المقدار يدل على الطاقة بالارجات .

(مثـال) طارة طول قطرها ٨ أقدام تدور ثلاث دورات فى الثـانية . فاذا فرضنا أن كتلتها بأ كملها وهى ١٦٨٠ پاوندا موزعة حول محيطها فأوجد بقدم ــ الپاوندات طاقتها الناشئة من دورانها

هنـا ك = ١٦٨٠

مر٢ = (نصف القطر)٢ = ٤٢

ـــ = ٢ ط / ز = ٢ ط / (١/٣) = ٦ ط

فطاقة الدوران مقدرة بالقدم ــ پاوندالات تساوى

١/٢ × ١٦٨٠ × ٤٢ × (٦ ط)٢

وبالقسمة على (ء) تكون الطاقة مقدرة بالقدم پاوندات هى

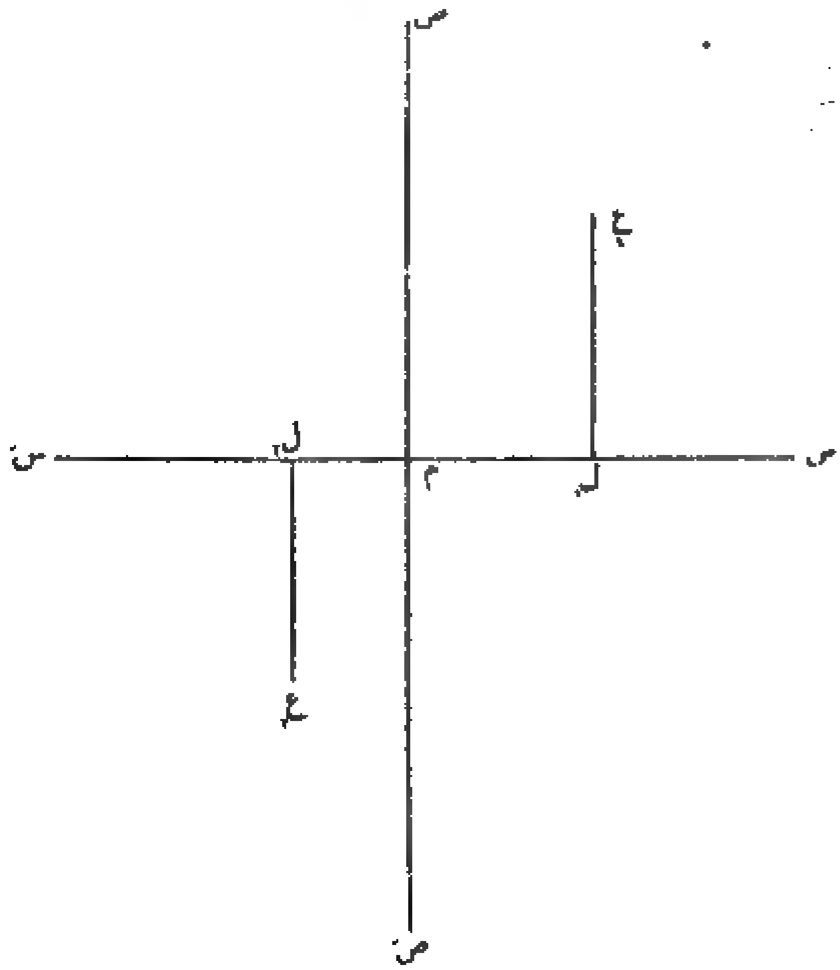
(١٦٨٠ × ٤٢ × ٣٦ ط٢) / (٢ × ٣٢)

= ١٥١٢٠٠ (باعتبار ط = ١٠)

بند ١٧٢ ــ الأبعاد الاحداثية .

لتكن ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، .... مواضع عدد ما من النقط فى مستوٍ واحد وليكن س م سَ ، ص م صَ مستقيمين أحدهما عمودى على الآخر فى ذلك المستوى يمران بنقطة مثل م .

تنزل من النقط $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، ..... المستقيمات $ع_1 ل_1$ ، $ع_2 ل_2$ ، $ع_3 ل_3$ ، ..... عمودية على س م سَ . فيمكن معرفة موضع أى واحدة من هذه النقط ($ع_1$ مثلا) بالنسبة للمستقيمين س م سَ ، ص م صَ اذا علم



(١) طولا المستقيمين م $ل_1$ ، $ل_1 ع_1$ ،

(٢) الاتجاه المقيس فيه م $ل_1$ ابتداء من م أى فى الاتجاه م س الى اليمين أو فى الاتجاه م سَ الى الشمال ،

(٣) الاتجاه المقيس فيه $ل_1 ع_1$ ابتداء من $ل_1$ أى الى أعلى فى الاتجاه م ص أو الى أسفل فى الاتجاه م صَ .

ويسمى البعدان م $ل_1$ ، $ل_1 ع_1$ بالبعدين الاحداثيين للنقطة $ع_1$. ويسمى م $ل_1$ بالاحداثى الأفقى ، $ل_1 ع_1$ بالاحداثى الرأسي . فيتعين موضع النقطة $ع_1$ تماما بمعرفة

احداثيها والاتجاهين المقيس فيهما هذان الاحداثيان . وعلى حسب ما اصطلح عليه فى علم حساب المثلثات يكون الطول الذى يماثل م ل١ المقيس ابتداء من م فى الاتجاه م س الى اليمين موجبا . ويدل عليه بعدد موجب . والطول الذى يماثل م ل٢ المقيس ابتداء من م فى الاتجاه م سَ الى الشمال يعتبر سالبا . ويدل عليه بعدد سالب . وكذا المستقيم الذى يماثل ل١ع١ المرسوم الى أعلى ابتداء من س م سَ يعتبر موجبا . ويدل عليه بعدد موجب . والمستقيم الذى يماثل ل٢ع٢ المرسوم الى أسفل ابتداء من س م سَ يعتبر سالبا ويدل عليه بعدد سالب . فنستنتج أن :

(١) النقطة التى فى الربع الأول أى الواقعة بين ضلعى الزاوية س م ص يكون احداثيها الأفقى موجبا (+) والرأسى موجبا (+) .

(٢) النقطة التى فى الربع الثانى أى الواقعة بين ضلعى الزاوية ص م سَ يكون احداثيها الأفقى سالبا (—) والرأسى موجبا (+) .

(٣) النقطة التى فى الربع الثالث أى الواقعة بين ضلعى الزاوية سَ م صَ يكون احداثيها الأفقى سالبا (—) والرأسى سالبا (—) مثال ذلك النقطة ع٢

(٤) النقطة التى فى الربع الرابع أى الواقعة بين ضلعى الزاوية صَ م س يكون احداثيها الأفقى موجبا (+) والرأسى سالبا (—) .

ويشار عادة الى النقطة التى احداثيها الأفقى ا واحداثيها الرأسى ب بأنها النقطة التى احداثياها (ا و ب) أو بأنها النقطة (ا و ب) .

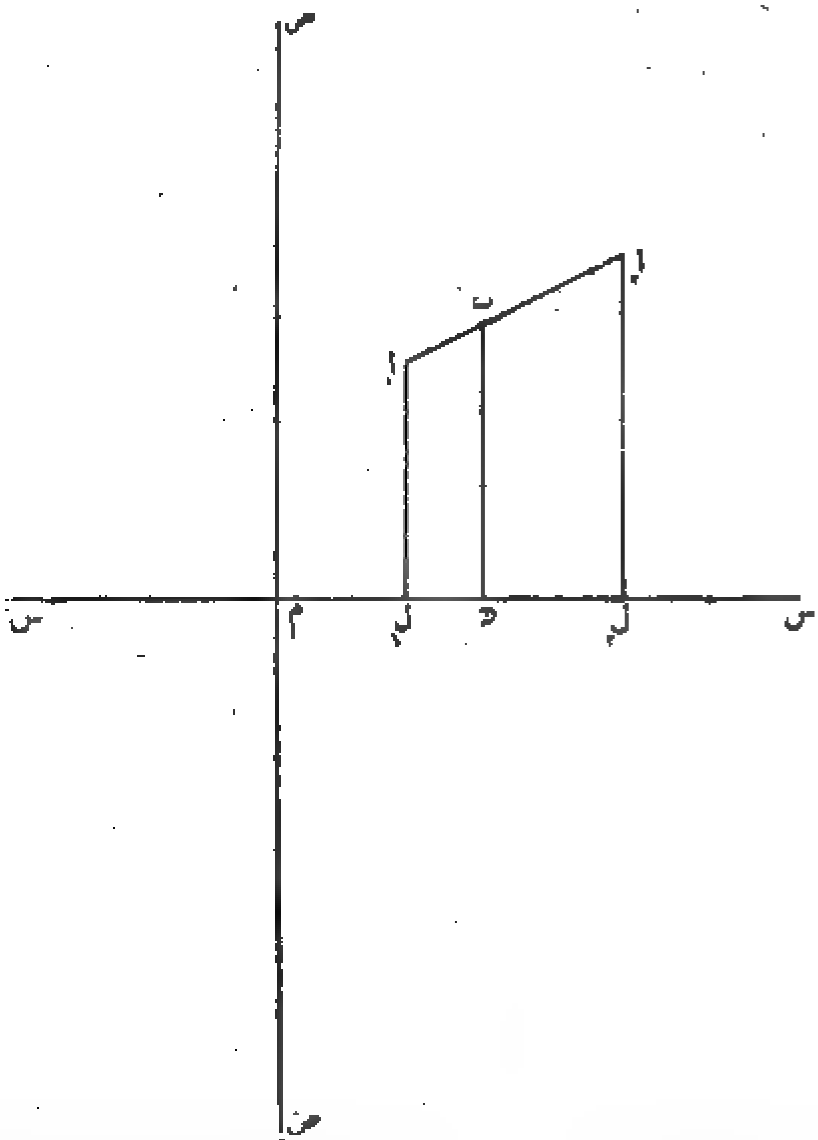
ويسمى المستقيمان س م سَ ، ص م صَ بمحورى الأبعاد الاحداثية . ويسمى س م سَ بمحور س ، ص م صَ بمحور ص .

(مثال) عيّن فى شكل مواضع كل من النقط الأربع التى أبعادها الاحداثية (٢و١) ، (—١و١) ، (—١و—٢) ، (٢و—٢) وأثبت أنها رءوس مربع

بند ١٧٣ — الابعاد الاحداثية لمركز قصور مجموعة من الكتل .

لتكن ا١ ، ا٢ ، ا٣ ، ... مواضع أجسام كتلها ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ولتكن (س١ و ص١) ، (س٢ و ص٢) ، (س٣ و ص٣) ، .... الأبعاد الاحداثية للنقط

$ا_١$ ، $ا_٢$ ، $ا_٣$ ، ..... وليكن $(\bar{س} , \bar{ص})$ البعدين الاحداثيين لمركز قصور الكل .



مركز قصور الكتلتين $ك_١$ التى موضعها $ا_١$ ، $ك_٢$ التى موضعها $ا_٢$ عبارة عن نقطة ب فى المستقيم $ا_١ ا_٢$ تقسمه قسما عكسيا بنسبة الكتلتين (راجع بند ٦٧) فاذا رمزنا بالرمز $\bar{س}$ الى الطول م د وهو الاحداثى الأفقى للنقطة ب . فمن الهندسة نجد أن $ا_١ ب : ا_٢ ب = ل_١ د : د ل_٢$ فينتج أن

$$\frac{ك_١}{ك_٢} = \frac{ا_٢ ب}{ا_١ ب} = \frac{د ل_٢}{د ل_١} = \frac{(م ل_٢ - م د)}{م د - م ل_١}$$

$$= \frac{س_٢ - \bar{س}}{\bar{س} - س_١}$$

ومنـه $ك_١(س - س_١) = ك_٢(س_٢ - س)$

أى $س(ك_١ + ك_٢) = ك_١س_١ + ك_٢س_٢$

ومركز قصور الكتل الثلاث $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ نقطة (حـ مثلا) فى المستقيم ب $أ_٣$ تقسمه قسما عكسيا بنسبة $ك_١ + ك_٢ : ك_٣$ فاذا رمزنا بالرمز $\bar{س}$ الى الاحداثى الأفق للنقطة حـ أمكن إيجاد $\bar{س}$ اذا علم س ، $س_٣$ من القانون الذى سبق اتباعه فى إيجاد س فيكون

$\bar{س}\{(ك_١ + ك_٢) + ك_٣\} = (ك_١ + ك_٢)س + ك_٣س_٣$

ولكن $(ك_١ + ك_٢)س = ك_١س_١ + ك_٢س_٢$

فيكون $\bar{س}(ك_١ + ك_٢ + ك_٣) = ك_١س_١ + ك_٢س_٢ + ك_٣س_٣$

وكذا يمكن ايجاد الاحداثى الأفق ($\bar{\bar{س}}$ مثلا) لمركز قصور الكتل الأربع $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، $ك_٤$ من القانون

$\bar{\bar{س}}(ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤) = ك_١س_١ + ك_٢س_٢ + ك_٣س_٣ + ك_٤س_٤$

وكذا الاحداثى الأفق لمركز قصور أى عدد من الكتل من القانون

$\bar{س}(ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \cdots) = ك_١س_١ + ك_٢س_٢ + ك_٣س_٣ + \cdots$

وللاختصار نضع

مج ك س بدلا من $ك_١س_١ + ك_٢س_٢ + ك_٣س_٣ + \cdots$

، مج ك بدلا من $ك_١ + ك + ك_٣ + \cdots$

فيكون $\bar{س}$ مج ك = مج ك س

، $\bar{س} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}}$ ... ...(١)

وبمثل ماتقدم نحصل على قيمة $\bar{ص}$ ويترك للطالب اثبات أن

$\bar{ص} = \frac{\text{مج ك ص}}{\text{مج ك}}$ ... ... (٢)

فمن القانونين (١) ، (٢) نحصل على البعدين الاحداثيين لمركز القصور (*)

(نتيجة) اذا فرضنا أن $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، . . . . . قوى متوازية بدلا من الكتل فان القانونين (١) و (٢) يعينان البعدين الاحداثيين لمركز القوى المتوازية . ومن الواضح أن هذين القانونين لايتوقفان على اتجاه القوى المتوازية . فهذا برهان للنظرية الواردة بصفحة (٧٧) .

(مثال ١) صفيحة مربعة هي ا ب حـ ء . وضع فى رءوسها ا ، ب ، حـ ، ء أربع كتل وهى ٤ باوندات و ٣ باوندات و باوندان و باوند واحد . أوجد مركز قصورها اذا أهمل ثقل الصفيحة .

نعتبر ا ب محور س ، ا ء محور ص ونرمز بالرمز ل الى طول ضلع المربع فتكون الأبعاد الاحداثية للكتل الأربع كما يأتى :

(١) للكتلة التى كتلتها ٤ باوندات وهى التى فى ا (٠،٠) و (٢) للكتلة التى كتلتها ٣ باوندات وهى التى فى ب (ل،٠) و (٣) للكتلة التى كتلتها باوندان وهى التى فى حـ (ل،ل) و (٤) للكتلة التى كتلتها باوند وهى التى فى ء (٠،ل)

فلو كان ($\overline{س}$, $\overline{ص}$) الاحداثيين لمركز القصور لحدث أن

$$\overline{س} = \frac{مج\, ك\, س}{مج\, ك}$$

$$= \frac{(٠ \times ١ + ل \times ٢ + ل \times ٣ + ٠ \times ٤)}{١ + ٢ + ٣ + ٤}$$

$$= \frac{٥\, ل}{١٠} = \frac{ل}{٢}$$

$$\text{،}\quad \overline{ص} = \frac{مج\, ك\, ص}{مج\, ك}$$

$$= \frac{(ل \times ١ + ل \times ٢ + ٠ \times ٣ + ٠ \times ٤)}{١ + ٢ + ٣ + ٤}$$

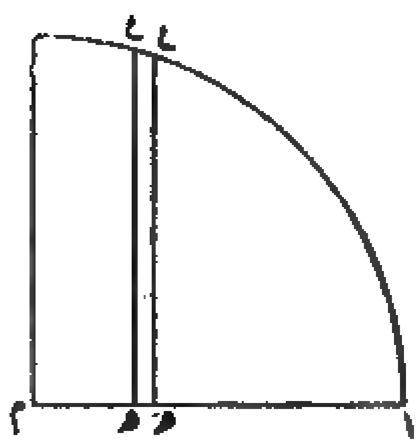
$$= \frac{٣\, ل}{١٠}$$

فنستنتج ماياتى لايجاد مركز القصور :

ننصف ا ب ، حـ ء بالنقطتين هـ ، و ثم نأخذ هـ ن على هـ و مساويا ثلاثة أعشاره فتكون ن مركز قصور الكتل الاربع .

(*) اذا لم تكن الكتل كلها فى مستو واحد نأخذ محورا ثالثا مثل م ع عموديا على المستوى س م ص ونتعين موضع مركز القصور بالابعاد الاحداثية الثلاثة $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $\overline{ع}$ علما أن $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ يحصلان من القانون (١) ، (٢) ، $\overline{ع} = \frac{مج\, ك\, ع}{مج\, ك}$

(مثـال ٢) أوجد مركز قصور نصف كرة مصمتة .



لتكن ا م ب ربع دائرة . فاذا دار الشـكل حول المسـتقيم م ا حدث نصـف كرة مصمة محورها م ا . ونرمز بالرمز نق الى نصف القطر م ا .

نقسم م ا الى د من الأقسام المتساوية . كل يساوى ء . فيكون $ء = \frac{\text{نق}}{\text{د}}$ وليكن هـ هـ' فى الشكل أحد هذه الأقسام . فاذا كان د عددا لانهائيا فى الكبر كان الطول ء لانهائيا فى الصغر (قارن ذلك ببند ٧٠)

وفى هذه الحالة يحصر مقطعا الكرة المـارّان بالنقطتين هـ ، هـ' قرصا مستديرا رقيقا جدًا نصف قطره ع هـ وسمكه هـ هـ' أو ء . فاذا كانت $ك_1$ رمزا الى كتلة هذا القرص ، ك رمزا الى كتلة نصف الكرة بأكمله يكون

$$\frac{ك_1}{ك} = \frac{\text{حجم القرص}}{\text{حجم نصف الكرة}}$$

$$= \frac{ط \times \overline{ع هـ}^2 \times هـ هـ'}{\frac{2}{3} ط \text{ نق}^3} = \frac{3 ء \times \overline{ع هـ}^2}{2 \text{ نق}^3}$$

$$\text{فيكون} \quad ك_1 = \frac{3 ء \times ك \times \overline{ع هـ}^2}{2 \text{ نق}^3}$$

ثم ان مركز قصور هذا القرص هو فى النقطة هـ فيمكن اعتبار القرص نقطة مادية كتلتها $ك_1$ موضـوعة فى النقطة هـ . وكذا يقال فى جميع الأقراص الأخرى التى ينقسم اليها نصف الكرة بمستويات عمودية على م ا مارّة بنقط تقسيم م ا .

فنسـتنتج أن مركز قصور نصف الكرة يقع على م ا . فاذا رمزنا بالرمز $\bar{س}$ الى بعد هذه النقطة عن م وبالرمز س الى طول م هـ يكون

$$ك_1 س = \frac{3 ء \times ك \times س \times \overline{ع هـ}^2}{2 \text{ نق}^3} = \frac{3 ء \times ك \times س (\text{نق}^2 - س^2)}{2 \text{ نق}^3}$$

بتعويض قيمة ك_1 ووضع $\text{ى}^2 - \text{س}^2$ بدل $\overline{\text{ع هـ}}^2$ وهما متساويان . وبأخذ مجموع حواصل الضرب المماثلة لهذا وهى التى يحصل عليها من اعتبار هذه الأقراص متوالية تنتج قيمة $\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س}$

فيكون $$\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س} = \text{مج}\,\frac{3\text{ء}\times\text{ك}\times\text{س}\,(\text{ى}^2-\text{س}^2)}{2\,\text{ى}^3}$$

ومعنى المقدار الذى بالطرف الأيسر هو أنا فى الكسر $\frac{3\text{ء}\times\text{ك}\times\text{س}\,(\text{ى}^2-\text{س}^2)}{2\,\text{ى}^3}$ قد جعلنا $\text{س} = \text{ء}$ ، $\text{س} = 2\text{ء}$ ، $\text{س} = 3\text{ء}$ ، ...... $\text{س} = \text{ن}\,\text{ء}$ على التعاقب ثم جمعنا النواتج . فباستخراج العوامل المشتركة بين هذه الكسور نرى أن

$$\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س} = \frac{3\text{ء}\times\text{ك}}{2\,\text{ى}^3}\;\text{مج}\,\text{س}\,(\text{ى}^2-\text{س}^2)$$

ومن حيث إن $\text{مج}\,\text{س}\,(\text{ى}^2-\text{س}^2) = \text{مج}\,(\text{ى}^2\text{س}-\text{س}^3) = \text{ى}^2\,\text{مج}\,\text{س} - \text{مج}\,\text{س}^3$

$$= \text{ى}^2(\text{ء} + 2\text{ء} + 3\text{ء} + \cdots + \text{ن}\text{ء}) - \{\text{ء}^3 + (2\text{ء})^3 + (3\text{ء})^3 + \cdots + (\text{ن}\text{ء})^3\}$$

$$= \text{ى}^2\,\text{ء}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} - \text{ء}^3\,\frac{\text{ن}^2(\text{ن}+1)^2}{4}$$

فيكون $$\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س} = \frac{3\text{ء}\times\text{ك}}{2\,\text{ى}^3}\left\{\text{ى}^2\,\text{ء}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} - \text{ء}^3\,\frac{\text{ن}^2(\text{ن}+1)^2}{4}\right\}$$

$$= \frac{3\text{ك}}{2\,\text{ى}^3}\left\{\frac{1}{2}\,\text{ى}^2\,\text{ن}^2\,\text{ء}^2\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right) - \frac{1}{4}\,\text{ن}^4\,\text{ء}^4\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^2\right\}$$

ومن حيث ان $\text{ن}\,\text{ء} = \text{ى}$ وأن $\frac{1}{\text{ن}}$ تساوى صفرا لأن ن لانهائية فى الكبر ينتج أن

$$\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س} = \frac{3\text{ك}}{2\,\text{ى}^3}\left\{\frac{1}{2}\,\text{ى}^4 - \frac{1}{4}\,\text{ى}^4\right\}$$

$$= \frac{3\,\text{ك}\,\text{ى}}{8}$$

وأيضا $\text{مج}\,\text{ك}_1 = \text{ك}$

فيكون $$\overline{\text{س}} = \frac{\text{مج}\,\text{ك}_1\,\text{س}}{\text{مج}\,\text{ك}_1} = \frac{3\,\text{ك}\,\text{ى}}{8\,\text{ك}}$$

$$= \frac{3\,\text{ى}}{8}$$

فينتج أن مركز ثقل نصف الكرة يقع على محورها على بعد $\frac{٣}{٨}$ نصف قطرها من مركزها .

(مثــال ٣) اذا كانت (س١ ص١) ، (س٢ ص٢) ، (س٣ ص٣) الأبعاد الاحداثية لرءوس مثلث كان البعدان الاحداثيان لمركز قصوره هما .

$$\frac{(س_١+س_٢+س_٣)}{٣} ، \frac{(ص_١+ص_٢+ص_٣)}{٣}$$

(مثــال ٤) ط ، ق ، ر قوى متوازية متجهة اتجاها واحدا ومؤثرة فى رءوس المثلث المتساوى الأضـــلاع ا ب حـ . فاذا كانت ط = ٢ ق = ٣ ر فأوجد موضع مركزها .

أوجد أيضا موضع المركز اذا انعكس اتجاه القوة ق

(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٤ — القسم الثانى)

اذا كان ٢ ل طول ضلع المثلث ، ء منتصف ا ب فان البعدين الاحداثيين للمركز (باعتبار أن ء ا ، ء حـ محورى س ، ص) يكونان فى الحالة الأولى $\left(\frac{٣ل}{١١} ، \frac{٢ل\sqrt{٣}}{١١}\right)$

وفى الحالة الثانية $\left(\frac{٩ل}{٥} ، \frac{٢ل\sqrt{٣}}{٥}\right)$.

(مثــال ٥) اذا وضــعت كتل ٣ باوندات و ٧ باوندات و ١٠ باوندات بحيث كانت الأولى فوق مستقيم أفقى معين بمسافة ٥ أقدام . والثانية فوقه بمسافة ٦ أقدام . والثالثة تحته بمسافة ١٢ قدما . فما موضع مركز ثقل هذه الكتل بالنسبة الى ذلك المستقيم ؟

(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٤ — القسم الثانى)

(الجـــواب) $\frac{٦٣}{٢٠}$ من الأقدام تحت المستقيم الأفقى .

(مثــال ٦) القضيب ا ب طوله معين ويتركب من جزأين متساويى القطع العمودى (متصل طرف أحدهما بطرف من الآخر). والثقل النوعى للجزء المتجه نحو ا يساوى $\frac{١}{٥}$ الثقل النوعى للجزء المتجه نحو ب فاذا كان مركز ثقل القضيب كله على بعد من ا يساوى $\frac{٢}{٣}$ طوله فما طول الجزء الذى يزيد فى ثقله النوعى منسوبا الى طول القضيب الكلى ؟

(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٣ — القسم الثانى)

اذا رمزنا بالرمز س الى النسبة بين طولى الجزء الثقيل وطول القضيب بأكمله تنتج المعادلة $١٢ س^٢ - ٨ س + ١ =$ صفرا

ومنها $س = \frac{١}{٢}$ أو $\frac{١}{٦}$ فيكون للمسألة حلان .

(مثال ٧) أثبت بالطريقة المبينة فى مثال (٢) أن مركز قصور مخروط دائرى قائم يقع على محوره على بعد من رأسه يساوى $\frac{٣}{٤}$ طول المحور .

(مثال ٨) اذا سلمنا أن مساحة المنطقة الكرية تناسب ارتفاعها فأثبت أن مركز قصور نصف كرة جوفاء يقع على المحور على بعد من مركزها مساوٍ لربع قطرها .

(مثال ٩) اذا تأملنا فى حالة التحرك المبينة ببند (٨٠) وهى التى يقذف فيها جسم فى اتجاه غير عمودى واخترنا ا ب ، ا م (راجع الشكل صفحة ١٣٥) محورى س ، ص فأثبت ما يأتى :

(١) البعدان الاحداثيان للنقطة حـ هما $\left(\frac{ع^٢ جا هـ جتا هـ}{ء} ، \frac{ع^٢ جا^٢ هـ}{٢ ء} \right)$

(٢) « « « ب هما $\left(\frac{٢ ع^٢ جا هـ جتا هـ}{ء} ، ٠ \right)$

(٣) « « للجسم بعد مضىّ د من وحدات الزمن ابتداء من لحظة قذفه هما $\left(ع د جتا هـ ، ع د جا هـ - \frac{١}{٢} ء د^٢ \right)$

(٤) السرعتان الأفقية والرأسية بعد مضىّ د من وحدات الزمن ابتداء من لحظة القذف تساويان ع جتا هـ ، ع جا هـ $-$ ء د

(٥) اتجاه الحركة بعد مضىّ د من وحدات الزمن ابتداء من لحظة القذف يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور س زاوية ظلها يساوى $\frac{ع جا هـ - ء د}{ع جتا هـ}$.

بند ١٧٤ — حل مسائل الاستاتيكا التى تتضمن الاحتكاك بالعمليات الهندسية —

اذا كان ر رمزا الى الضغط العمودى بين جسمين يكاد يزلق أحدهما على الآخر وكان ق رمزا الى الاحتكاك فان

$$ق = ك ر \quad \text{(١)}$$

والقوتان ر ، ق يمكن تركيبهما معا أى أن يستعاض عنهما قوة واحدة (رَ مثلا) تؤثر فى اتجاه يصنع مع اتجاه القوة ر زاوية هـ

وتتعين ر َ ، هـ (بند ٥٠) بالمعادلات الآتية :

$$ر' = \sqrt{ر^{2} + ن^{2}}$$

$$= ر \sqrt{١ + ك^{2}} \quad (لأن\ ن = ك\ ر) \quad ...\quad (٢)$$

$$و\ ظا\ هـ = \frac{ن}{ر} = ك \quad ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\quad (٣)$$

فاذا كانت و زاوية الاحتكاك كان ظا و = ك فنستنتج أن المعادلة (٣) تدل على أن

ظا هـ = ظا و

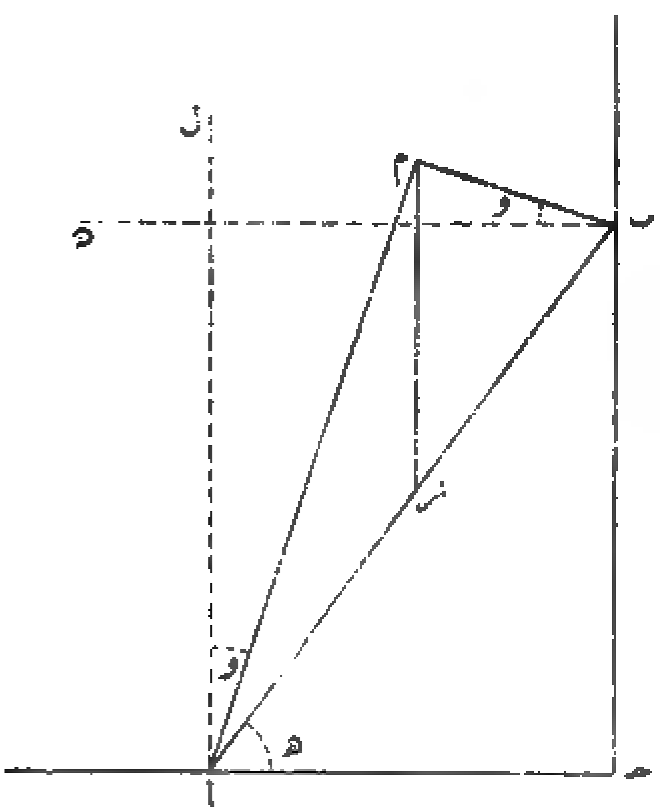
، هـ = و ... ... (٤)

واذا سمينا ر َ ردّ الفعل الكلى بين الجسمين أمكننا أن نعبر عن النتيجة (٤) كما يأتى :

اذا أوشك جسم أن يزلق فوق آخر فان ردّ الفعل الكلى يصنع مع العمود على سطحيهما المشترك بينهما زاوية تساوى زاوية الاحتكاك .

وبتطبيق هذه القاعدة تعين بالعمليات الهندسية الأوضاع النهائية لتوازن الجسمين بتأثير ثلاث قوى .

(مثال ١) وضع القضيب المنتظم ا ب بحيث كان الطرف ا مرتكزا على مستوٍ أفقى خشن والطرف ب مرتكزا على حائط رأسى مساوٍ للأفق فى الخشونة . وكان المستوى الرأسى المار بالقضيب ا ب عمودا على الحائط أوجد الوضع النهائى للتوازن .



ليكن الشكل دالا على موضع القضيب عند ما يكاد يزلق الى أسفل . ولتكن هـ رمزا الى الزاوية ب ا حـ التى يصنعها القضيب وهو فى هذا الموضع مع

الأفق . فاذا كانت و رمزا الى زاوية الاحتكاك فالزاوية التى يصنعها ا م (اتجاه ردّ الفعل الكلى فى ا) مع الاتجاه الرأسى ا ل تساوى الزاوية وعلما بأن الزاوية ل ا م مقيسة من ا ل الى اليمين .

وكذا يؤثر ردّ الفعل الكلى فى ب فى الاتجاه ب م الذى يميل على الخط الأفق ب د بزاوية م ب د التى تساوى و . ويكاد القضيب يتزن بتأثير ردى الفعل الكليين فى ا ، ب وثقله الذى يؤثر الى أسفل مارًا بالنقطة ن منتصف ا ب .

ومن هذه القوى الثلاث اثنتان تمرّان بالنقطة م فيجب أن تمرّ الثالثة بها أيضا . فالمستقيم م ن رأسى .

ويكمل حل المسألة بالهندسة . ففى المثلث ا م ن نجد أن

$$\frac{\text{ان}}{\text{نم}} = \frac{\text{جا ا م ن}}{\text{جا م ا ن}}$$

$$= \frac{\text{جا و}}{\text{جا }(٩٠ - \text{هـ} - \text{و})} = \frac{\text{جا و}}{\text{جتا }(\text{هـ} + \text{و})}$$

وفى المثلث ب م ن نجد أن

$$\frac{\text{ب ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{جا ب م ن}}{\text{جا م ب ن}}$$

$$= \frac{\text{جا }(٩٠ - \text{و})}{\text{جا }(\text{هـ} + \text{و})} = \frac{\text{جتا و}}{\text{جا }(\text{هـ} + \text{و})}$$

ولكن ا ن = ب ن فيكون $\frac{\text{ان}}{\text{نم}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{ن م}}$

فينتج أن $$\frac{\text{جا و}}{\text{جتا }(\text{هـ} + \text{و})} = \frac{\text{جتا و}}{\text{جا }(\text{هـ} + \text{و})}$$

ومنه $$\text{ظا هـ} = \frac{(١ - \text{ظا}^٢\text{ و})}{٢ \text{ ظا و}}$$

وبجعل ظا و = $\frac{١}{٣}$ نحصل على مسألة المثال الأول من بند (٨٥) فاذا وضع بدل ظا و المقدار $\frac{١}{٣}$ فى المعادلة السابقة يحدث أن .

$$\text{ظا هـ} = \frac{١ - \frac{١}{٩}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٤}{٣}$$

كما فى بند (٨٥)

(مثال ٢) جسم ذو ثقل معين هو و . وضع على مستوٍ مائل خشن ثم أوقعت عليه قوة هي ق متجهة فى اتجاه عمودى على المستوى . فما الشروط التى يجب اجتماعها حتى تمنع القوة ق الجسم من الزلق ؟

واذا كان ميل المستوى على الأفق ٣٠° وثقل الجسم ٢٠ پاوندا . فما مقدار معامل الاحتكاك بينهما عند ماتكون القوة التى تؤثر كما ذكرنا قبل حتى تكاد تمنع الجسم من الزلق تساوى ١٠ پاوندات ؟ (امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٦ — القسم الثانى)

يجب أن تؤثر محصلة ق ، و فى اتجاه يصنع مع اتجاه ق زاوية ظلها يساوى معامل الاحتكاك ك . ومن حيث إن الزاوية التى بين ق ، و تساوى ميل المستوى (هـ) ينتج من بند (٥٠) أن

$$\text{ك} = \frac{\text{و جاهـ}}{\text{ق} + \text{و جتاهـ}}$$

وهى العلاقة المطلوب ايجادها بين ق ، و ، هـ ، ك

واذا كانت ق = ١٠ ، و = ٢٠ ، هـ = ٣٠° ينتج أن

$$\text{ك} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٢٠}{\left(١٠ + ٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)}$$

$$= \frac{١٠}{\left(١٠ + ١٠\sqrt{٣}\right)} = \frac{١}{\left(١ + \sqrt{٣}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{٣} - ١\right)}{٢}$$

(مثال ٣) ا نقطة ملساء على ارتفاع معين هو ع فوق مستوٍ أفقى وقد وضع قضيب متجانس الكثافة طوله ٢ ع بحيث ارتكز عليها وكان أحد طرفيه على المستوى فاذا بقى ساكنا وهو مائل على الأفق بزاوية أكبر من ٦٠° فأوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى . وأوجد أيضا كلا من الضغط على المستوى والنقطة عند ما يكاد القضيب يزلق . (امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٣ — القسم الثانى)

معامل الاحتكاك $= \frac{٣\left(٨ + \sqrt{٣}\right)}{٦١}$ والضغط العمودى على المستوى $= \frac{\text{و}\left(٢ - \sqrt{٣}\right)}{٢}$ والضغط على النقطة $= \frac{\text{و}\sqrt{٣}}{٤}$ اذا علم أن و ثقل القضيب .

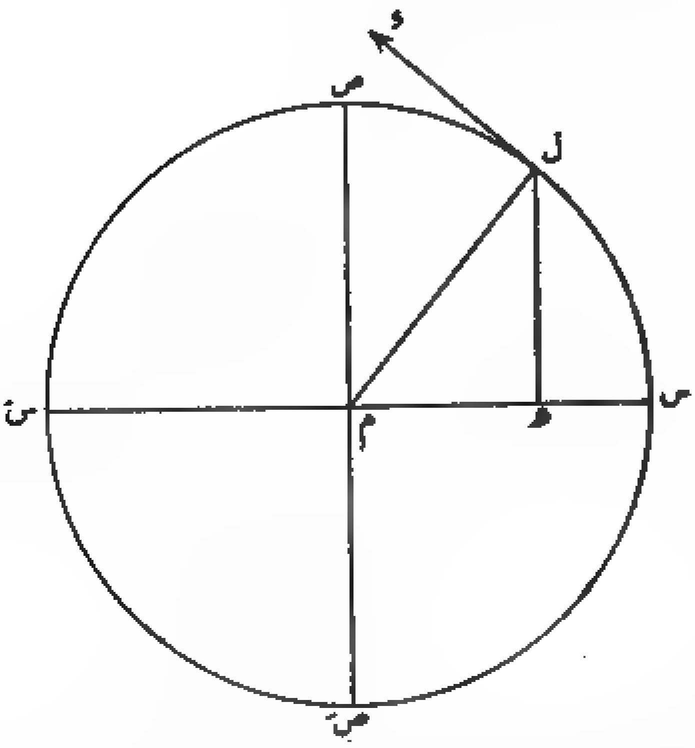
(مثال ٤) كرتان ثقلاهما و ، وَ مرتكزتان على مستويين مائلين مختلفى الخشونة والميل وقد وصلت أعلى نقطة من إحداهما بأعلى نقطة من الأخرى بخيط أفقى عمودى على الحرف الأفقى المشترك بين المستويين ومار فوقه . فاذا كان ك ، كَ معاملى الاحتكاك اللذين يعملان كلا من الكرتين بحيث تكادان تزلقان كان

$$ك و = كَ وَ$$

بند ١٧٥ — الحركة التوافقية البسيطة .

(تعريف) اذا قطعت نقطة مثل ل محيط دائرة بسرعة منتظمة ورسم ل هـ عموديا على قطر فى الدائرة (س سَ) فان حركة النقطة هـ على المستقيم س سَ تسمى حركة توافقية بسيطة .

ومن الواضح أن حركة هـ تكون حركة تذبذب . وعندما تكون ل فى الوضع س تكون هـ فى هذا الوضع عينه . وبينما تتحرك ل على الربع الأول س ص تتحرك هـ على نصف القطر س م وتصل الى م عند وصول ل الى ص . وبينما تقطع ل الربع الثانى ص سَ تتحرك هـ من م الى سَ ثم تنطبق ل على هـ مرة ثانية فى سَ فنرى أنه بينما تقطع ل النصف الأول س ص سَ من محيط الدائرة تتحرك م من س الى سَ وكذلك بينما تقطع ل النصف الثانى سَ صَ س من المحيط تتحرك م رجوعا من سَ الى س . فحركة ل هى حركة تذبذب بين النهايتين س ، سَ



وتسمى الدائرة التى ترسمها ل بالدائرة المساعدة للنقطة هـ . ويسمى م س ، م سَ الذى يساويه سعة الحركة التوافقية . فالدائرة المساعدة هى التى مركزها م منتصف مسار الحركة التوافقية . ونصف قطرها يساوى السعة .

ومدة الذبذبة فى الحركة التوافقية البسيطة عبارة عن الوقت الذى يمضى بين مرور هـ مرتين متعاقبتين بالنقطة س . ومن الواضح أنها تساوى مدة الدوران فى الدائرة المساعدة.

لتكن ا رمزا الى السعة ، ن رمزا الى مدة الذبذبة ولتكن ع السرعة الطولية ، ى السرعة الزاوية فى الدائرة المساعدة . وانا باحثون عن مقدارى السرعة والعجلة للنقطـة هـ وهى فى موضع معين بدلالة هـذه الرموز . لذلك نرمز بالرمز س الى الطول م هـ وهو بعد هـ عن م فى لحظة معينة .

فسرعة هـ هى مركبة سرعة ل فى الاتجاه هـ م . فينتج (بند ٢٣) أن

سرعة هـ = سرعة ل × جيب تمام الزاوية التى يصنعها ل ى مع م س

$$= \text{ع جا س م ل} = \frac{\text{ع}}{\text{ا}} \times \text{ل هـ} \quad .$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ا}} \sqrt{\text{م ل}^2 - \text{م هـ}^2} = \frac{\text{ع}}{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{س}^2} \quad \text{... ... ... (١)}$$

$$= \text{ى} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{س}^2} \quad \text{... ... ... (٢)}$$

لأن $\frac{\text{ع}}{\text{ا}} = \text{ى}$ (بنـد ٩١)

وعجلة هـ عبارة عن المركبة لعجلة ل فى الاتجاه م س . وعجلة ل هى $\frac{\text{ع}^2}{\text{ا}}$ فى اتجاه نصف القطر ل م (بند ٩٠) اذن

$$\text{عجلة هـ} = \left(\frac{\text{ع}^2}{\text{ا}}\right) \text{جتا س م ل}$$

$$= \left(\frac{\text{ع}}{\text{ا}}\right) \times \frac{\text{م ل}}{\text{ا}}$$

$$= \left(\frac{\text{ع}^2}{\text{ا}}\right) \times \text{م ل} = \left(\frac{\text{ع}^2}{\text{ا}^2}\right) \text{س} \quad \text{... ... ... (٣)}$$

$$= \text{ى}^2 \text{س} \quad \text{... ... ... (٤)}$$

$$= \frac{\text{٤ ط}^2}{\text{ن}^2} \text{س} \quad \text{... ... ... (٥)}$$

ومن المقدار الذى أوجدناه للسرعة نستنبط النتائج الآتية :

(أولا) اذا كانت س = ا تكون السرعة صفرا وذلك فى النقطة س ، س_1

(ثانيـا) اذا كانت سـ = صفرا تكون السرعة تساوى ع وذلك فى النقطة م

(ثالثـا) تكون السرعة أكبر ما يمكن فى النقطة م

وتتجـــه عجلة هـ دائما نحو م . ومن ب مقدارها فى أى موضع نستنبط النتائج الآتيـــة :

(رابعـا) اذا كانت سـ = ا وذلك فى س، ، سَ تكون العجلة $\frac{ع^2}{ا}$ = ـــ ٢ ا

(خامسا) اذا كانت سـ = صفرا تكون العجلة صفرا وذلك فى م

(سادسا) تكون العجلة أكبر ما يمكن فى س، ، سَ

وبذلك تظهر الخواص العامة للحركة التوافقية فالنقطة هـ تبدأ من س بسرعة تساوى صفرا وعجلة تساوى $\frac{ع^2}{ا}$ فى الاتجاه س م وتزداد سرعتها على التدريج فى الاتجاه س م كما تنقص عجلتها على التدريج فى ذلك الاتجاه .

وعند ما تمر بالنقطة م تكون السرعة ع والعجلة صفرا . وفى الربع الثانى من مدة الذبذبة يكون للجسم فى الاتجاه سَ م أى فى الاتجاه المضاد لاتجـاه التحرك وبسبب هذه العجلة السالبة تنقص سرعة هـ من ع الى الصفر فى النقطة سَ . أما الحركة فى الربعين الثالث والرابع فهى كالحركة فى الربعين الثانى والأول وانما يضاد الاتجاه فى الحالة الأولى الاتجاه فى الحالة الثانية .

إذا سمينا م هـ الازاحة أمكن وضع النتيجة (٥) بالصورة الآتية :

$$\frac{\text{العجلة}}{\text{الازاحة}} = \frac{٤ ط^2}{ز^2}$$

(نتيجة) اذا تذبذبت نقطة مثل هـ فى مستقيم مثل س سَ بتأثير عجلة متجهة نحو م منتصف س سَ ومساوية الازاحة من الموضع المتوسط ر من المرات كانت حركة هـ حركة توافقية بسيطة مدة الذبذبة فيها $\frac{٢ ط}{\sqrt{ر}}$

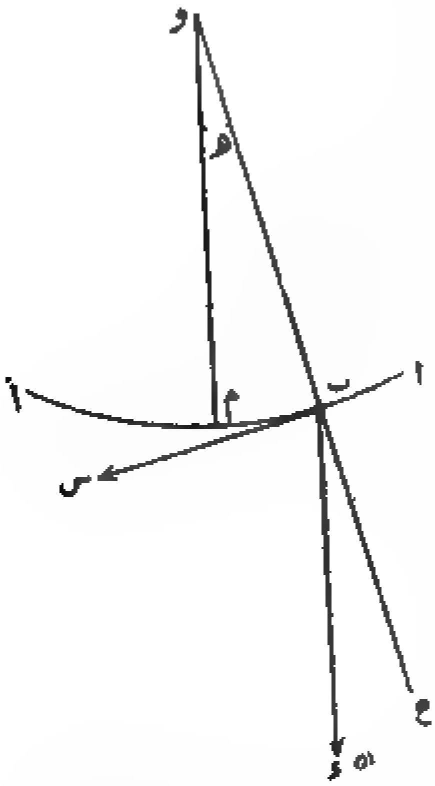
[illegible] دائرة م فرضنا ن نقطة مثل ل تتحرك فى هذه الدائرة بسرعة زاوية منتظمة قدرها $\sqrt{ر}$ فان د مسقط ل على س سَ ترسم المستقيم س سَ بعجلة تساوى م د ر من المرات . فاذا ابتدأت ل ، هـ

فى وقت واحد من حالة السكون من النقطــة س فمن الواضح أن هـ ، د تتحدان دائما لأنهما تبدأان بسرعة واحدة وتكون عجلتهما واحدة فى كل لحظة . ومن حيث إن حركة د (من التعريف) توافقية بسيطة ينتج أن حركة هـ توافقية بسيطة أيضا .

ومدّة ذبذبتها تساوى مدّة ذبذبة د أى مدّة دوران ل أى $\frac{٢ ط}{\sqrt{ر}}$ (بند ٩١) .

بند ١٧٦ — <u>إثبات قانون مدّة ذبذبة البندول البسيط</u> .

الشكل يمثل وضع بندول بسـيط طوله ل قد أزيحت كرته فى القوس م ب . نرمز إليه بالرمز س . فتكون م و ب الزاوية التى أزيح فيها . ونرمز اليها بالرمز هـ . ولتكن سعة التذبذب مقدّرة بالقوس م ا . ونرمز اليه بالرمز ا$_١$ ومقدّرة بالزاوية م و ا ونرمز اليها بالرمز حـ .



نبحث فى القوى التى تؤثر فى كرة البنـدول وهو فى هذا الوضع فنرى أنها (١) شدّ الخيط فى الاتجاه ب و ، (٢) ثقـل الكرة ك ء المتجهـة الى أسفل علما بأن ك كتلتها . ونحلل هذه القوة ك ء الى مركبتين إحداهما فى الاتجاه ب ع (امتداد نصـف القطر) والأخرى فى الاتجـاه ب س المماس فى ب . فنرى أن مركبة الثقل فى الاتجاه ب ع والقوة المركزية الطاردة يوازنهـما الشدّ . وأما المركبة فى الاتجاه ب س فلا توازنها قوة أخرى . وهذه المركبة الأخيرة وحدها هى التى تؤثر فى الاتجاه ب س . فهى القوة التى تحدث العجلة فى كرة البنـدول . وبمقتضى قانون الحركة الثانى لنيوتن يكون مقـدار هـذه العجلة مساويا خارج قسمة هذه القوة على كتلة كرة البندول فعجلة كرة البندول فى الاتجاه ب س

$$= \frac{\text{ك} \times \text{ء (جيب تمام الزاوية التى يصنعها س ب مع الاتجاه الرأسى)}}{\text{ك}}$$

$$= \frac{\text{ك ء جا هـ}}{\text{ك}} = \text{ء جا هـ}$$

وقد علمنا أن الزاوية هـ في البندول البسيط صغيرة دائما ونعلم من حساب المثلثات أن جيب الزاوية الصغيرة قريب جدا من قياسها بالتقدير الدائرى فينتج أن عجلة كرة البندول تساوى تقريبا

$$\text{ء} \times \text{هـ} = \frac{\text{ء} \times \text{م ب}}{\text{ب و}} = \frac{\text{ء} \times \text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ء}}{\text{ل}} \times \text{س}$$

فاذا قارنا هذه العجلة بعجلة النقطة هـ المبينة فى نتيجة بند (١٧٥) نجد أن $\frac{\text{ء}}{\text{ل}}$ قد حلت هنا محل ر فى تلك الحالة . فينتج أن مدة ذبذبة البندول تساوى

$$\text{٢ ط} \div \sqrt{\frac{\text{ء}}{\text{ل}}}$$

$$= \text{٢ ط} \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ء}}}$$

(مثال ١) تتحرك نقطة مادية حركة توافقية بسيطة سعة ذبذبتها $\frac{١}{١٠٠}$ من السنتيمتر . فاذا كانت مدة الذبذبة التامة $\frac{١}{٢٠٠}$ من الثانية فأوجد (١) السرعة فى المركز ، (٢) السرعة فى منتصف المسافة بين المركز والنقطة المتطرفة ، (٣) العجلة فى النقطة المتطرفة ، (٤) العجلة فى منتصف المسافة بين المركز والنقطة المتطرفة .

الجواب (١) ٤ ط من السنتيمترات فى الثانية (٢) ٢ ط $\sqrt{٣}$ من السنتيمترات فى الثانية (٣) ١٦٠٠ $\text{ط}^{٢}$ من السنتيمترات فى الثانية فى الثانية (٤) ٨٠٠ $\text{ط}^{٢}$ من السنتيمترات فى الثانية فى الثانية .

(مثال ٢) اذا استعملت رموز البند السابق فأثبت أن سرعة كرة البندول تساوى

$$\sqrt{\frac{\text{ء}\,(\text{ا}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})}{\text{ل}}} \quad ، \quad \frac{\text{٢ ط} \sqrt{(\text{ا}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})}}{\text{ن}}$$

علما بأن ن مدة الذبذبة الكاملة

(مثال ٣) أثبت أنه يمكن وضع مقدار السرعة بالصورتين الآتيتين :

$$(١)\ \sqrt{\text{ء ل}\,(\text{ح}^{٢} - \text{هـ}^{٢})} \quad ، \quad (٢)\ \frac{\text{٢ ط ل} \sqrt{\text{ح}^{٢} - \text{هـ}^{٢}}}{\text{ن}}$$

(مثال ٤) أثبت أن السرعة فى أسفل نقطة يمكن تصويرها بالصور الآتية :

$$(١)\ \frac{٢\,ط\,ا_{١}}{ن}\ ،\ (٢)\ ا_{١}\sqrt{\frac{ء}{ل}}\ ،\ (٣)\ حـ\sqrt{ء\,ل}$$

(مثال ٥) اذا رمزنا الى السرعة فى أسفل نقطة بالرمز ع فأثبت انها بعد مضى د من وحدات الزمن ابتداء من المرور بأسفل نقطة تساوى

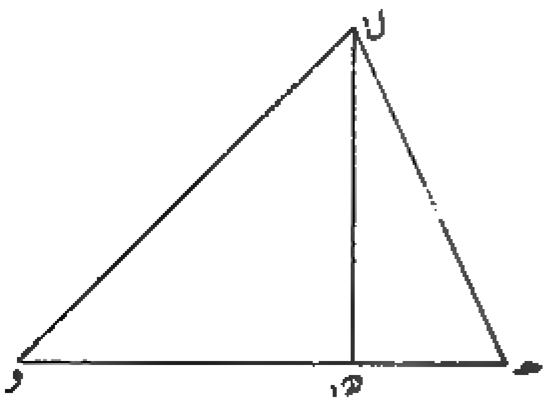
$$ع\ \text{جتا}\ \frac{٢\,ط\,د}{ن}$$

بند ١٧٧ — نظريات تتعلق بعزوم القصور .

(نظرية ١) اذا كانت ك كتلة جسم ما ، م عزم قصوره بالنسبة الى أى محور يمر بمركز ثقله وكان مَ عزم قصوره بالنسبة الى محور يوازى المحور الأول ويبعد عنه مسافة ع كان

$$مَ = م + ك\,ع^{٢}$$

تقسم الكتلة ك الى كتل صغيرة جدا لانهاية لعددها $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، $ك_{٣}$ ، ... فى النقط $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $ل_{٣}$ ، ...... ونفرض أن مستوى الورقة هو المستوى المار بالنقطة $ل_{١}$ عموديا على المحورين المتوازيين وأن و نقطة قطع هذا المستوى للمحور المار بمركز الثقل ، حـ نقطة قطعه للمحور الموازى للمحور الأول ثم ننزل $ل_{١}\,د_{١}$ عمودا على و حـ ونرمز بالرمز $س_{١}$ الى الطول $و\,د_{١}$ فلكون و حـ = ع ينتج أن



$$\overline{حـ\,ل_{١}}^{٢} = \overline{و\,ل_{١}}^{٢} + \overline{حـ\,و}^{٢} - ٢\,حـ\,و \times و\,د_{١}$$

$$= \overline{و\,ل_{١}}^{٢} + ع^{٢} - ٢\,ع\,س_{١}$$

$$\therefore\ ك_{١}\,\overline{حـ\,ل_{١}}^{٢} = ك_{١}\,\overline{و\,ل_{١}}^{٢} + ك_{١}\,ع^{٢} - ٢\,ع\,(ك_{١}\,س_{١})$$

نكوّن معادلات شبيهة بهذه المعادلة لكل من الكتل $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، ....
ثم نجمع فنحصل على المعادلة الآتية :

$$مَ = م + ع^٢ (ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ...) -$$
$$٢ ع (ك_١ سـ_١ + ك_٢ سـ_٢ + ك_٣ سـ_٣ + ...)$$

ولما كان $ك_١ سـ_١ + ك_٢ سـ_٢ + ك_٣ سـ_٣ + ...$ عبارة عن مجموع حواصل الضرب الحادثة من ضرب كتلة كل نقطة مادية فى بعدها عن المستوى المار بالنقطة و عموديا على و حـ ينتج أنه يساوى ك $\overline{سـ}$ (راجع الملاحظة التى بآخر صفحة ٢٧٢) علما بأن $\overline{سـ}$ بعد مركز الثقل عن ذلك المستوى . ولكن $\overline{سـ}$ = صفرا لأن مركز الثقل يقع فى المستوى فينتج أن

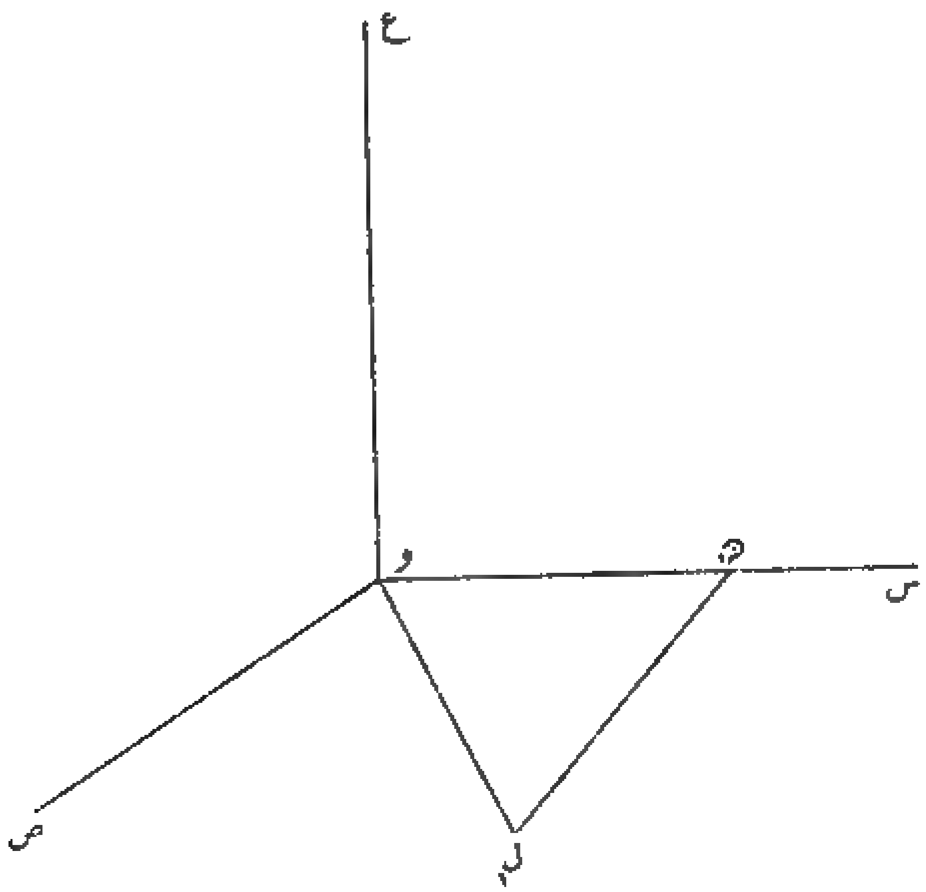
$$ك_١ سـ_١ + ك_٢ سـ_٢ + ك_٣ سـ_٣ + ... = صفرا$$

وأيضا $ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ... = ك$

فيؤول القانون السابق الى ماياتى :

$$مَ = م + ك ع^٢$$

(نظــرية ٢) إذا كان ا ، ب رمزين لعزمى قصور صفيحة بالنســبة لمحورين



احدهما عمودى على الآخر (و س ، و ص) وقد وقعا فى مستوى الصفيحة كان عزم القصور حـ بالنسبة لمحور مثل و ع عمودى على مستوى الصفيحة مساويا ا + ب

، تقسم الجسم الى عدد لانهاية له من الأجزاء الصغيرة (كما فى نظرية ١). ونرمز بالرموز $(\text{س}_1 \text{ و } \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 \text{ و } \text{ص}_2)$ ، $(\text{س}_3 \text{ و } \text{ص}_3)$ ، ...... الى الأبعاد الاحداثية للكل ك_1 ، ك_2 ، ك_3 ، .... التى مواضعها ل_1 ، ل_2 ، ل_3 ، .... فيكون

ا = عزم القصور بالنسبة للمحور و س

$$= \text{ك}_1\text{ص}_1^2 + \text{ك}_2\text{ص}_2^2 + \text{ك}_3\text{ص}_3^2 + \dots\dots$$

، ب = عزم القصور بالنسبة للمحور و ص

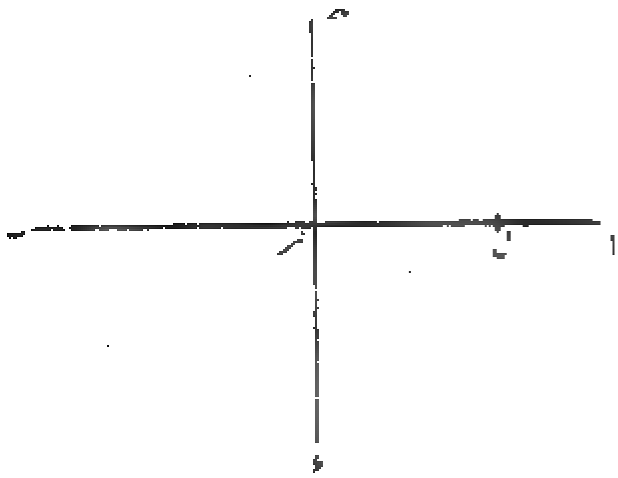
$$= \text{ك}_1\text{س}_1^2 + \text{ك}_2\text{س}_2^2 + \text{ك}_3\text{س}_3^2 + \dots\dots$$

$$\text{حـ} = \text{ك}_1\overline{\text{و}\text{ل}_1}^2 + \text{ك}_2\overline{\text{و}\text{ل}_2}^2 + \text{ك}_3\overline{\text{و}\text{ل}_3}^2 + \dots\dots$$

$$= \text{ك}_1(\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2) + \text{ك}_2(\text{س}_2^2 + \text{ص}_2^2) + \text{ك}_3(\text{س}_3^2 + \text{ص}_3^2) + \dots\dots$$

$$= (\text{ك}_1\text{ص}_1^2 + \text{ك}_2\text{ص}_2^2 + \text{ك}_3\text{ص}_3^2 + \dots) + (\text{ك}_1\text{س}_1^2 + \text{ك}_2\text{س}_2^2 + \text{ك}_3\text{س}_3^2 + \dots)$$

أى حـ = ا + ب



(مثال ١) أوجد عزم قصور قضيب منتظم هو ا ب طوله ٢ ط بالنسبة للمحور حـ ء الذى يمر بمنتصفه ن عموديا على طوله .

تقسم كلا من نصفى القضيب (ن ا ، ن ب) الى د من الأقسام المتساوية ثم نأخذ مجموع عزوم قصور هذه الأقسام بالنسبة للمحور حـ ء ونجعل فى حاصل الجمع د = مقدارا لا نهائيا فى الكبر (اقرن ذلك بمثال ٢ بند ١٧٣)

نفرض أن $\frac{ط}{د} = م$ فيكون م طول كل جزء من الأجزاء الصغيرة التى انقسم اليها القضيب ونأخذ جزءا من هذه الأجزاء موضعه ل بحيث يكون $ن ل = س \times م$.

فاذا كانت ك كتلة القضيب بأجمعه ، $ك_١$ كتلة الجزء الذى موضعه ل ينتج أن :

$$\frac{ك_١}{ك} = \frac{م}{٢ط}$$

فيكون
$$ك_١ = \frac{ك \times م}{٢ط}$$

وعزم قصور الجزء الذى كتلته $ك_١$ بالنسبة للمحور حـ ى .

$$= \left(\frac{ك م}{٢ط}\right) \overline{ن ل}^٢ = \frac{ك م}{٢ط} \times س^٢ م^٢$$

$$= \frac{ك م^٣ س^٢}{٢ط}$$

وبجعل س = ١ ، س = ٢ ، س = ٣ ، .... ، س = د على التعاقب فى هذا القانون ثم بالجمع ينتج عزم قصور نصف القضيب ن ا بالنسبة للمحور حـ ى .

وكذا يمكن ايجاد عزم قصور ن ب فعزم قصور القضيب بأكمله

$$= مج \frac{٢ ك م^٣ س^٢}{٢ط}$$

$$= \frac{٢ ك م^٣}{٢ط} (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots\dots + د^٢)$$

$$= \frac{ك م^٣}{ط} \times \frac{د(د+١)(٢د+١)}{٦}$$

$$= \frac{ك}{٦ط} \times م^٣ \times د^٣ \left(١ + \frac{١}{د}\right)\left(٢ + \frac{١}{د}\right)$$

ومن حيث ان $د م = ط$ ، $\frac{١}{د}$ = صفرا عندما تكون د عددا لا نهاية له ينتج أن عزم قصور القضيب بالنسبة الى حـ ى يساوى .

$$\frac{ك}{٦ط} \times ط^٣ \times ٢ = \frac{ك ط^٢}{٣}$$

(مثـال ٢) أثبت بنظرية (١) أن عزم قصور القضيب بالنسبة لمحور يمر بأحد طرفيه عموديا على طوله يساوى $\frac{٤ ك ط^٢}{٣}$.

(مثـال ٣) اذا قسم مستطيل الى أقسام موازية أحد أضلاعه وكانت كتلته ك وضلعاه ٢ ا ، ٢ ب فأثبت ما يأتى :

(١) عزم قصور المستطيل بالنسبة لمحور فى مستويه مار بمركزه عموديا على الضلع ٢ ا يساوى $\frac{ك ا^٢}{٣}$ وبالنسبة الى محور عمودى على الضلع ٢ ب يساوى $\frac{ك ب^٢}{٣}$.

(٢) عزم قصور المستطيل بالنسبة لمحور مار بمركزه عموديا على مستويه يساوى $\frac{ك (ا^٢ + ب^٢)}{٣}$

(٣) عزم قصور المستطيل بالنسبة الى الضلع ٢ ا يساوى $\frac{٤ ك ب^٢}{٣}$ وبالنسبة الى الضلع ٢ ب يساوى $\frac{٤ ك ا^٢}{٣}$.

(٤) عزم قصور المستطيل بالنسبة الى محور مار بأحد رؤوسه عموديا على مستويه يساوى $\frac{٤ ك (ا^٢ + ب^٢)}{٣}$

(مثـال ٤) عزم قصور دائرة نصف قطرها ا وكتلتها ك بالنسبة الى محور مار بمركزها عموديا على مستويها يساوى $\frac{ك ا^٢}{٢}$

اقسم الدائرة بدوائر متحدة معها فى المركز الى حلقات غاية فى الصغر .

(مثـال ٥) استنتج من مثال (٤) أن عزم قصور دائرة بالنسبة الى أحد أقطارها يساوى $\frac{ك ا^٢}{٤}$.

(مثـال ٦) أثبت أن عزم قصور كرة نصف قطرها ا بالنسبة الى أحد أقطارها يساوى $\frac{٢ ك ا^٢}{٥}$

اقسم الكرة بمستويات عمودية على المحور الى صفائح مستديرة واستخدم (مثال ٤) .

(مثـال ٧) يستعمل قانون إيجاد طول البندول البسيط المكافىء (بند ١٠١) فى إثبات أن مركزى التعليق والتذبذب للبندول المركب يمكن أن يحل أحدهما محل الآخر . أى برهن على أن $\frac{ر^٢}{ق} = \frac{ر^{\prime ٢}}{ق^\prime}$ (مستعملا رموز بند ١٠٢) .

(مثال ٨) أوجد طول البندول البسيط المكافىء اذا تذبذب قضيب منتظم طوله ١٢ قدما حول محور أفقي عمودى على طوله وكان المحور مارا (١) بأحد طرفى القضيب (٢) بنقطة على بعد قدمين من أحد الطرفين (٣) بنقطة على بعد ٣ أقدام من أحد الطرفين .

الجواب (١) ٨ اقدام (٢) ٧ أقدام (٣) ٧ أقدام .

(مثال ٩) أوجد طول البندول البسيط المكافىء اذا تذبذب مستطيل منتظم طول ضلعيه ٢ ا ، ٢ ب حول محور أفقي (١) وانطبق المحور على الضلع ٢ ا (٢) ومر المحور بأحد رءوس المستطيل عموديا على مستويه .

الجواب (١) $\frac{\text{٤ ب}}{\text{٣}}$ (٢) $\frac{\text{٤}\sqrt{\text{ا}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}}{\text{٣}}$

(مثال ١٠) أوجد طول البندول البسيط المكافىء اذا تذبذبت دائرة منتظمة نصف قطرها ا حول محور أفقي فى مستويها على بعد $\frac{\text{ا}}{\text{٢}}$ من المركز .

الجواب ا

بند ١٧٨ — حل المسائل بالطرق العملية .

يمكن استعمال الطريقة العملية فى بند ١٦٩ لحل كثير من مسائل الديناميكا ولا يحتاج فى ذلك الى قواعد جديدة لأن هذه الطريقة إن هى إلا توسّع فى طريقة حل مسائل متوازى الأضلاع للسرع بالرسم ويتبين ذلك من الأمثلة الآتية :

(مثال ١) عين الاتجاه والسرعة الحقيقيين لباخرة تسير شمالا ببيت الأبرة (البوصلة) بسرعة ١٠ عقدات فى الساعة فى تيار سرعته ٤ عقدات متجه نحو الجنوب الشرقى .

وعين ما يحدث من التغير حتى تسير الباخرة شمالا مستخدما الابرة .

(جامعة لندن — الامتحان المتوسط لدرجة بكالوريوس فى العلوم سنة ١٨٨٧)

نأخذ النقطة م ونرسم م ا شمالا بحيث يساوى ١٠ وحدات (بوصات مثلا) ثم نرسم م ب فى اتجاه الجنوب الشرقى مساويا ٤ بوصات . ونكمل متوازى الأضلاع م ا حـ ب الذى ضلعاه المتجاوران م ا ، م ب . ونصل م حـ فيكون م حـ دالا على السرعة الحقيقية للباخرة . وبقياس م حـ نجد أن طوله ٧٫٧ من البوصات فسرعة الباخرة الحقيقية ٧٫٧ من العقدات فى الساعة . واتجاهها هو م حـ الذى عيناه بالرسم .

ويجاب عن الشق الأخير من السؤال بأن نرسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م ا ثم نمد ب م الى بَ حتى يكون بَ م = م ب ونرسم بَ ء شمالا ليقابل الدائرة فى ء فيكون م ء الاتجاه الذى يجب أن تسلكه الباخرة .

(مثال ٢) قوتان قدرهما ٧ وحدات ، ١٦ وحدة ومحصلتهما ٢١ وحدة . أوجد بالرسم اتجاههما . (امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٥ — القسم الأول)

نرسم المثلث ا ب حـ بحيث تكون أضلاعه ا ب ، ب حـ ، حـ ا مساوية ٧ بوصات ، ١٦ بوصة ، ٢١ بوصة ثم نرسم ا ء موازيا ب حـ ، حـ ء موازيا ب ا فتكون المستقيمات ا ب ، ا ء ، ا حـ ممثلة للقوى ٧ ، ١٦ ، ٢١ فى المقدار والاتجاه .

(مثال ٣) ء منتصف الضلع ب حـ من المثلث ا ب حـ وصل ا ء ثم فرض أن أثرت قوى من ا الى ب ومن ا الى حـ ومن ا الى ء ومن ب الى حـ مناسبة لأطوال هذه المستقيمات على التناظر . أوجد بالرسم محصلتها .
(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٥ — القسم الثانى)

محصلة ا ب ، ا حـ هى ٢ ا ء فمحصلة ا ب ، ا حـ ، ا ء تكون ٣ ا ء فنستنتج مايأتى :

نمد ا ء الى هـ بحيث يكون ء هـ = ٣ ا ء ونمد ء حـ الى و بحيث يكون ء و = ٢ ء حـ ثم ننشئ متوازى الأضلاع ء هـ ر و على ء هـ ، ء و فتكون ء ر المحصلة .

(مثال ٤) القضيب ا ب متجانس الكثافة اتصل طرفه ا بمفصل بأسفل نقطة من اناء على شكل نصف كرة جوفاء وارتكز طرفه الآخر على السطح الداخلى منه أوجد الضغط على الاناء فى ب وعلى المفصل فى ا علما بأن طول القضيب يساوى نصف قطر الاناء . (امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٥ — القسم الثانى)

اذا كانت م مركز الاناء كان م ا ب مثلثا متساوى الأضلاع .

من القوى التي تؤثر في القضيب اثنتان تمران بالنقطة حـ منتصف م ب وهما ردّ الفعل في ب وثقل القضيب . فينتج أن القوة الثالثة وهي ردّ الفعل في ا تمر بالنقطة حـ أيضا . فالمثلث القائم الزاوية م ا حـ أضلاعه م ا ، حـ م ، ا حـ موازية القوى الثلاث على التناظر وهي ثقل القضيب و ، ردّ الفعل في ب ولنسمه ر ، ردّ فعل المفصلة ولنسمه رَ فينتج أن ر = و/٢ ، رَ = و√٣/٢

(مثال ٥) خيط طوله ٩ أقدام ربط طرفاه بطرفي قضيب طوله ٦ أقدام ثم علق حتى يمكن ادارته بلا عائق حول نقطة على بعد قدمين من أحد طرفيه ثم وضع ثقل على الخيط (كما توضع خرزة في عقد) . أوجد الوضع الذي فيه يسكن القضيب على فرض أنه عديم الوزن وأن لا احتكاك بين الثقل والخيط .

(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٧٦ — القسم الثاني)

ليكن ا حـ ب قضيبا سهل الحركة حول النقطة حـ (ا حـ = قدمين) وليكن ا م ب شكلا ممثلا لوضع التوازن ، م موضع الثقل على الخيط . فاذا اعتبرنا اتزان الثقل واتزان القضيب نرى أن م حـ يجب أن يكون رأسيا وأن ينصف الزاوية ا م ب فطول م ا ثلاث أقدام وطول م ب ٦ أقدام ويمكن البرهنة على أن طول م حـ هو √١٠ من الأقدام . فنستنتج ما يأتي :

نأخذ الطول حـ م مقيسا من أعلى الى أسفل ومساويا √١٠ ثم ننشئ المثلثين م حـ ا ، م حـ ب المعينة أضلاعهما فيكون ا حـ ب مستقيما فيتعين وضع الاتزان تعيينا تاما .

(مثال ٦) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ . أضلاعه قضبان صلبة منتظمة هي ا ب ، ب حـ ، حـ ا متصلة . بمفاصل ، ا ب قضيب ثقيل . وأما الآخران فخفيفان جدا حتى يمكن اعتبارهما عديمي الثقل . فاذا علق المثلث من حـ وكان سهل الحركة حولها فأوجد وضع الاتزان والقوى المؤثرة في القضبان .

(امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٨٢ — القسم الثاني)

الذى يؤثر فى ب ح هو قوتا رد الفعل فى ب ، ح فقط . وهاتان لابد أن تكونا مؤثرتين على طول ب ح . وأن تكونا متساويتين ومتضادتين وكذا يقال فى القضيب ح ا . فاذا كان ر ، رَ رمزين لقوتى ردّ الفعل على طول ب ح ، ح ا ، و ثقل ا ب ينتج من مثلث القوى أن :

$$\text{ر} = \text{و} \times \frac{\text{ب ح}}{\text{ا ب}} \quad ، \quad \text{رَ} = \frac{\text{و} \times \text{ح ا}}{\text{ا ب}}$$

فيمكن تعيين ر ، رَ اذا عينت و . وذلك بقياس الأطوال ب ح ، ح ا ، ا ب . والخط الرأسى المار بالنقطة ح لابد أن يمر بالنقطة ن منتصف ا ب . فالزاوية أ ح ن مساوية الزاوية ح ا ن . وبذا يتعين وضع الاتزان .

أسـئلة بعض الامتحانات

(١) علوم وفنون — ميكانيكا

القسم الأول

[لا يسوغ للطالب ان يجيب عن أكثر من ٧ أسئلة وله أن يختارها كيف شاء]

(١) أذكر طريقة إيجاد مركز الثقل فى الأحوال الآتيـة : (ا) صفيحة مربعة (ب) صفيحة مثلثة (حـ) مخروط . بفـرض أن الجسم فى كل حالة متجانس الكثافـة .

(٢) اذا أثرت قوى متوازنة قدرها ١٠ ، ١٣ ، ١٦ من الوحدات فى نقطة واحدة فبين بالرسم طريقة تأثيرها .

(٣) القضيب ا ب يدور بلا عائق حول مفصل فى ا ويرتكز فى وضع مائل بحيث يكون الطرف ب على حائط رأسى أملس . بيّن بالرسم كيف تؤثر القوى التى تجعل القضيب ساكنا واذكر أسماءها .

(٤) أذكر تعريف عزم القوّة بالنسبة الى نقطة ما .

يرتكز قضيب منتظم ثقله ٦ باوندات فى وضع أفقى على حاملين تحت طرفيه متباعدين بمسافة ٨ أقدام . فعلق ثقل قدره ٢٤ باوندا فى نقطة تبعد عن أحد الطرفين مسافة ٣ أقدام . أوجد الضغط على كل من الحاملين .

(٥) اشرح معنى حسّاسية الميزان . وبيّن لماذا تكون عظيمة عند ماتكون ذراعا الميزان طويلتين ؟ وكذا عند مايكون مركز ثقل العاتق قريبا من نقطة ارتكازه .

(٦) أذكر تعريف القدم — باوند من الشغل .

رجل ثقله ١٤٠ باوندا وضع على ظهره حملا ثقله ١٠٠ باوند فصعد به سلما حتى وصل الى ارتفاع ٥٠ قدما . فما مقدار جميع الشغل الذى بذله ؟ وأى جزء من هذا الشغل أفاد ؟

(٧) اذا ازدادت سرعة جسم ازديادا منتظما قدره ٣٢ قدما فى الثانية فى كل ثانية فبكم قدم فى الثانية تزداد سرعته فى دقيقة واحدة ؟

اذا كانت السرعة ١٩٢٠ قدما فى الثانية فما قدرها بالياردات فى الدقيقة ؟

(٨) اكتب القانون المستعمل لإيجاد المسافة التى يقطعها جسم فى زمن معين وهو متحرك بسرعة منتظمة العجلة .

قذف جسم الى أعلى فكان أقصى علو بلغه ١٢١ قدما فما سرعة قذفه ؟ وبعد كم ثانية يرجع الى نقطة قذفه ؟

(٩) تحرك جسم كتلته ١٠ باوندات بسرعة ١٠ أقدام فى الثانية فما طاقة حركته اذ ذاك ؟

اذا لاقى هذا الجسم مقاومة ثابتة قدرها $\frac{١}{٢٠}$ من ثقله فما المسافة التى يقطعها قبل أن يسكن ؟

(١٠) اذا انغمس جسم بعضه أوكله فى سائل . فما مقدار محصلة ضغط السائل عليه ؟

وضع جسم ثقله النوعى ١,٤ وحجمه ٣ أقدام مكعبة فى إناء به ماء يكفى لتغطيته . فما ضغطه على نقط قعر الاناء التى يرتكز عليها ؟

(١١) اشرح بالإيجاز طريقة تعيين الثقل النوعى بالميزان لجسم غير قابل للذوبان .

اذا كان وزن الجسم ٧٣٢ جراما فى الفراغ و ٢٥٢ جراما فى الماء . فما ثقله النوعى ؟

(١٢) ملئت أنبوبة بالماء ثم غمس طرفها المفتوح فى ماء فلم يدخلها هواء فكانت أعلى نقطة منها مرتفعة عن سطح الماء بمسافة ٢٠ قدما . فاذا علم أن طول البارومتر المائى ٣٤ قدما . فما ضغط الماء داخل الأنبوبة عند أعلى نقطة مقدرا بالباوندات لكل قدم مربعة ؟ (ثقل القدم المكعبة من الماء ٦٢,٥ من الباوندات) اذا ثقبت الأنبوبة فى أعلى نقطة . فماذا يحدث . ولماذا ؟

(٢) القسم الثانى

[لايسوغ للطالب أن يجيب عن أكثر من ٨ أسئلة وله أن يختارها كيف شاء]

(١) أذكر القاعدة التى بها توجد محصلة قوتين متوازيتين متحدتى الاتجاه مؤثرتين فى جسم صلب مع البرهان .

أثرت قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه قدرهما ١٠ ، ١٢ من الوحدات فى النقطتين ا ، ب وأثرت قوة ثالثة قدرها ١٥ وحدة من ا نحو ب . أوجد محصلة القوى الثلاث وبيّن كيفية تأثيرها بالرسم .

(٢) أثبت أن الازدواجين المتساويى العزم المختلفى الاشارة يتوازنان عند ما يؤثران فى جسم صلب وهما فى مستوٍ واحد .

(٣) ا ب حـ ء شكل رباعى . فاذا كانت ط ، ى منتصفى ا ب ، حـ ء وكانت م منتصف ط ى فبرهن على أن القوى التى يمثلها م ا ، م ب ، م حـ ، م ء تتوازن .

(٤) الصفيحة ا ب حـ على شكل مثلث متساوى الأضلاع (قد أهمل وزنه) اتصل رأسه ب بحائط بمفصل والرأس حـ مرتكز على الحائط تحت ب . فاذا علق ثقل معين من ا فما المقدار والاتجاه لكل من القوتين اللتين توقعهما الصفيحة على الحائط عند ب ، حـ ؟

(٥) أذكر تعريف معامل الاحتكاك .

وضع ثقل قدره ٥٠٠ باوند على نضد فوجد أن قوة أفقية قدرها ١٥٥ باوندا تكاد تحركه . أوجد زاوية الاحتكاك بالرسم . فان لم يكن معك آلات الرسم فبين طريقة تقدير عدد درجات تلك الزاوية .

(٦) أوجد النسبة بين القوة المحركة والمقاومة فى اللولب مع مراعاة الاحتكاك بين شريطه و "الصامولة" .

(٧) أذكر تعريف القدم — باوند من الشغل وكذا تعريف قدرة الحصان .

رافع بخارى (ونش) قدرته ٣ أمثال قدرة الحصان يرفع ثقلا قدره ١٠ أطنان مسافة ٥٠ قدما فى ٢٠ دقيقة . فأى جزء من شغله يُبذل فى التغلب على الاحتكاك ؟

اذا اشتغل الرافع على هــذا المنوال ٨ ساعات . فما مقدار الشــغل المبذول في التغلب على الاحتكاك مقدّرا بالقدم — باوند ؟

(٨) قذف جسم فى الفراغ بسرعة معينة فى اتجاه معين . أوجد موضعه بعــد مضى زمن معين .

قذف جسم فى اتجاه مائل على الأفق بزاوية ٣٠° فمر بنقطة بعدها الأفقى عن نقطة القذف ٤٠٠ $\sqrt{3}$ من الأقدام وبعدها الرأسى عنها ٧٦ قدما . أوجد سرعة قذفه (ء = ٣٢) .

(٩) جسم كتلته ١٠ يتحرك بسرعة ٥ صدم آخر كتلته ٢٠ يتحرك بسرعة ٣ صــدمة عمودية عليه فاذا كان معامل الاسترداد ١٢٥ر. فأوجد من مبــادئ الديناميكا سرعتى الجسمين بعد الصــدم . اذكر المبــادئ الديناميكية التى تهتدى بها الى حل هذه المسألة وعرّف معامل الاسترداد .

(١٠) دارة ثقلها ١٠٠٠٠ باوند يمكن اعتبــار مادتها مجتمعة بانتظام على محيط دائرة نصف قطرها ١٢ قدما . فما طاقة حركتها عند ما تدور ١٥ دورة فى الدقيقة ؟ وكم دورة تدور بعــد حبس البخار اذا قاومها احتكاك قدره ٤٠٠ باوند يقع على محيط محور قطره قدم واحدة (ء = ٣٢) ؟

(١١) اذكر تعريف مركز ضغط سائل على سطح مستوٍ وأوجد موضعه فى مستطيل أحد أضلاعه منطبق على سطح السائل .

أوجد مركز ضغط السائل على المستطيل عند مايكون مستويه رأسيا وضلعه الأعلى الأفقى تحت السطح على مسافة تساوى ارتفاع المستطيل .

(١٢) اذا علم الثقلان النوعيان لسائلين فبين كيفية تعيين الثقل النوعى لمزيج مكوّن من حجمين معينين منهما على فرض أن الحجم لا يتغير بالمزج .

امتزج ثلاثة لترات من سائل ثقله النوعى ٨ر. بخمســة لترات من آخر ثقله النوعى ٠٤ر١ . أوجد الثقل النوعى للمزيج .

(أولا) إن لم ينقص الحجم بالمزج .

(ثانيا) ان نقص بمقدار ٥ فى المــائة من مجموع الحجمين .

(٣) جامعة لندن

امتحان الدخول (Matriculation)

فلسفة طبيعية

[لا يسوغ أن يجيب الطالب عن أكثر من ٨ أسئلة بينها اثنان على الأقل من قسم ا]

(ا)

(١) عرف كلا من السرعة والعجلة والقوة وكمية التحرك . وبين معنى السرعة المنتظمة العجلة .

زلق جسم الى أسفل على مستوٍ مائل على الأفق بزاوية ٣٠° . ما المسافة التى يقطعها فى الثانية الرابعة من حركته (ء = ٣٢) ؟

(٢) نقطتان ماديتان اتصلتا بخيط مارّ على بكرة ثابتة . بيّن طريقة تعيين العجلة التى تنزل بها أثقل النقطتين .

اذا كانت كتلتا النقطتين ١٧ و ١٥ أونسا (Ounce) فما شدّ الخيط ؟

(٣) ما معنى الفائدة الميكانيكية لمجموعة من البكرات أو لأى آلة أخرى ؟

أوجد النسبة بين القوة ق والثقل و فى مجموعة مركبة من ٥ بكرات متحركة قد علق كل منها بخيط خاص بها علما بأن ثقل كلٍّ يساوى ق .

(٤) ما معنى مركز ثقل الجسم ؟ بيّن طريقة إيجاد مركز ثقل جملة نقط مادية ثقيلة فى مستوٍ واحد .

وضعت أثقال قدرها ١ و ٢ و ٣ و ٤ من الباوندات فى رءوس المربع ا ب حـ ء . أوجد البعد بين مركز ثقلها ومركز المربع .

(٥) ميّز الثقل من الكتلة .

سقطت قنبلة كتلتها ٦٠ باوندا مسافة رأسية قدرها ٤٠ قدما . ما طاقة حركتها ؟ بأي سرعة يجب قذفها من مدفع لتكون طاقة حركتها الابتدائية مساوية لذلك المقدار ؟

(ب)

(٦) ميز الجسم الصلب من المائع . ما خاصة الجسم التام الميع ؟

مكعب طول حرفه قدم واحدة علق فى الماء بحيث كان سطحه الأعلى أفقيا تحت سطح الماء بمسافة ٢ ½ من الأقدام . أوجد الضغط الواقع على كل وجه من أوجهه بفرض أن كتلة القــدم المكعبة من الماء = ٦٢,٥ من الپاوندات .

(٧) عرّف الثقل النوعى واشرح القواعد المبنى عليها عمل الأيدرومتر .

ساق ايدرومتر معتاد أسطوانية . فاذا كانت العلامة العليا المرقومة عليها تدل على ثقل نوعى قدره ١ والعلامة السفلى تدل على ثقل نوعى قدره ١,٢ . فما الثقل النوعى الذى تدل عليه علامة فى منتصف المسافة ؟

(٨) ما الشروط التى تحدّد الارتفاع الذى يمكن رفع ماء اليه بالمضخة الماصة ؟ كيف تدار هذه المضخة عند ما يراد رفع ماء بها الى ارتفاع يزيد على ما تحدّده هــذه الشــروط ؟

اشرح الوسائل المتخذة فى المضخة الرافعة لمنع مرور الماء بين ساق المكبس وغطاء الأسطوانة .

(٩) كيف تعين الثقل النوعى لقرص من الذهب بميزان إيدروستاتيكى له صنجات من النحاس ؟ بيّن تأثير الهواء فى كل وزنة وكذا فى النتيجة النهائية إن لم يصلح الخطأ الناشئ من ثقل الهواء المزاح .

(هذه الورقة تحتوى أيضا على مسائل فى الطبيعة)

(٤) جامعــــة ادنبرج

الامتحان الابتدائى فى الطب — علم الميكانيكا

(١) عرّف السرعة وبيّن كيفية تقديرها .

اذكر مثالا لجسم بسيط متحرك تتحرك أجزاؤه بسرع مختلفة .

(٢) بيّن كيفية تحليل سرعة معينة فى اتجاهين أحدهما عمودى على الآخر . اذا تحركت نقطة فى اتجاه مائل على الاتجاه الرأسى بزاوية ٣٠° فأوجد المركبة الأفقية لسرعتها .

(٣) ابحث فى القانون غ^{٢} = ع^{٢} + ٢ حـ ف الذى يعين السرعة النهائية لجسم ابتدأ بسرعة ع وتحرك بعجلة ثابتة قدرها حـ مسافة ف . ما المعنى الديناميكى لهذا القانون ؟

(٤) ابتدأ جسم بسرعة ٦ أقدام فى الثانية وتحرك بعجلة ثابتة مدة ٥ ثوان فاكتسب سرعة قدرها ٢١ قدما فى الثانية . فما عجلته ؟ وما سرعته المتوسطة ؟ وما المسافة التى قطعها ؟

(٥) ارتكز جسم كتلته ٣ باوندات على نضد أملس وقد اتصل بخيط مار على حافة النضد عُلق منه جسم آخر كتلته باوند واحد فاذا أخذت المجموعة تتحرك من حالة السكون فأوجد المسافة التى يقطعها أحد الجسمين فى ٤ ثوان . واذا ترك الجسم الأول النضد فى نهاية ٤ ثوان فكيف تعين حركته بعد ذلك ؟

(٦) عرّف مركز كتلة الجسم . واذكر طريقة عملية لتعيينه .

(٧) اذا عُلّق ثقلان قدرهما ٣ باوندات ، ٥ باوندات من نقطتين فى أحد جانبى رافعة بعداهما عن نقطة الارتكاز ٧ بوصات ، ٩ بوصات . فما الثقل الذى يعلق من نقطة فى الجانب الآخر بعدها عن نقطة الارتكاز ٣ بوصات حتى يوازنهما ؟

(٨) ارتكز القضيب المنتظم ا ب على الأرض فى ب وعلى حائط رأسى أملس فى ا . ثم وصل منتصفه حـ بخيط بالنقطة ء موقع العمود النازل من ب على الحائط . بيّن بالرسم القوى التى تؤثر فى القضيب . اذا كانت الأرض ملساء فهل يمكن أن يبقى القضيب فى حالة الاتزان ؟ ولماذا ؟

(٩) عرّف الضغط عند نقطة ما فى مائع . وأثبت أنه اذا لم توجد قوى خارجية مؤثرة فيه كان الضغط واحدا عند جميع النقط وفى جميع الجهات .

اذا أثرت قوى خارجية فى المائع . فماذا تؤول اليه هذه النظرية ؟

(١٠) أوجد الضغط عند نقطة على عمق ٢٠ قدما فى ماء معرض للهواء . علما بأن ثقل القدم المكعبة من الماء ٦٢,٥ من الباوندات .

(٥) جامعـــة ادنبرج

امتحان الأستاذية فى الفنون — الفلسفة الطبيعية

(١) ميز العجلة المنتظمة من المتغيرة .

مثل لأجسام متحركة :

(ا) بعجلة ثابتة مقدارا واتجاها .

(ب) بعجلة ثابتة مقدارا لا اتجاها .

(حـ) بعجلة ثابتة اتجاها لامقدارا .

(ء) بعجلة متغيرة مقدارا واتجاها .

(٢) اذا تحركت نقطـة بعجلة منتظمة فى اتجاه حركاتها فأثبت أنهـا تقطع مسافات مناسبة لمربعات الأزمنة التى مضت من بدء حركتها .

(٣) ميّز الطاقة من الشغل . واشرح معنى بقاء الطاقة .

أزيح بندول بسيط الى جانب حتى ارتفعت كرته مسافة رأسية قدرها م من البوصات ثم ترك ونفسه . أوجد سرعة كرته عند ماتمر بنقطته السفلى .

(٤) اذا كانت ق ، ق١ قوتين متوازيتين فأوجد مقدار محصلتهما وخط تأثيرهما .

(ا) عند ماتكونان متحدتى الاتجاه .

(ب) عند ماتكونان مختلفتى الاتجاه .

وابحث فى الحالة التى تكون فيها القوتان مختلفتى الاتجاه ومتساويتين .

(٥) عرّف مركز الكتلة (أى مركز القصور الذاتى) وأذكر موضعه فى الأحوال الآتية من غير برهان :

(ا) صفيحة مثلثة منتظمة .

(ب) ثلاث نقط مادية متساوية فى رءوس مثلث .

(حـ) محيط مثلث مكوّن من سلك منتظم .

ا ، ب نقطتان ماديتان كتلتاهما م ، د . ، ن مركز كتلتهما ، ط نقطة أخرى .

أثبت أن

$$\text{م}\times\overline{\text{اط}}^{2}+\text{د}\times\overline{\text{بط}}^{2}=\text{م}\times\overline{\text{ان}}^{2}+\text{د}\times\overline{\text{بن}}^{2}+(\text{م}+\text{د})\,\overline{\text{طن}}^{2}$$

(٦) بماذا تتعين القوة ؟

ما معنى الوحدة المطلقة للقوى ؟ وما الوحدات الأساسية الداخلة فيها ؟

(٧) صِف الأجزاء الأساسية لآلة أتود . واذكر وظيفة هذه الآلة .

(٨) أثبت أنه اذا تحرك جسم بعجلة ثابتة مقدارا واتجاها كان هودجرافه مستقيما .

ما الهودجراف فى الحالتين الآتيتين : (ا) الجسم المقذوف ، (ب) الكوكب السيار ؟

(٩) ما معنى مركز الضغط ؟

متى يتحد مركز الضغط ومركز القصور الذاتى ؟

انغمس مستطيل فى الماء بحيث كان أحد أضلاعه فى سطحه . بيّن كيفية قَسْمِه بمستقيمين أفقيين حتى تكون الضغوط على الأجزاء الثلاثة متساوية .

(١٠) اشرح طريقة تعيين الثقل النوعى لجسم صُلْب يطفو فوق الماء .

(١١) تحتوى أنبوبة منحنية على سائلين لا يمتزجان . والفرق بين سطحيهما الخالصين ا من البوصات. وارتفاع السطح الخالص لأثقلهما عن السطح المشترك ب من البوصات فقارن بين ثقليهما النوعيين .

(تحتوى هذه الورقة أيضا على أسئلة فى الطبيعة)

(٦) جامعة جلاسجو

امتحان الأستاذية فى الفنون — الفلسفة الطبيعية

الورقة الأولى

(١) عرّف القوة والكثافة والسرعة وكمية التحرك .

بأى الوحدات تقدّر هذه المقادير ؟

(٢) أذكر ماهية نظرية متوازى الأضلاع للقوى .

إذا سلمنا بأن هذه النظرية صحيحة فيما يتعلق باتجاه المحصلة فأثبت أنها صحيحة أيضا فيما يتعلق بمقدارها .

أذكر تجربة توضح هذه النظرية .

(٣) بأى زاوية يجب أن تميل قوة قدرها ٦ داينات على أخرى قدرها ١٠ داينات حتى تكون محصلتهما ١٤ داينا ؟

إذا ضوعفت هذه الزاوية فما المحصلة ؟

(٤) أوجد محصلة قوتين متوازيتين متحدتى الاتجاه .

قضيب مدرج الى أقدام علّق فى علامات تدريجه أثقال قدرها ٨ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ٥ من الباوندات على هذا الترتيب ففى أى نقطة يجب ارتكاز القضيب حتى يتزن إذا علم أن طوله ٤ أقدام .

(٥) عرّف مركز ثقل المثلث وأثبت أنه هو مركز ثقــل ثلاث نقط مادية متساوية فى رءوســه .

(٦) ارسم مجموعة بكرات كل خيط فيها متصل بالثقل (المقاومة) .

هل الأنفع فى هذه المجموعة أن تكون البكرات ثقيلة أم خفيفة ؟

(٧) اذكر ماهية قوانين الحركة لنيوتن .

بيّن أن القانون الثانى يرشدنا الى وسيلة لقياس القوّة وقياس كتلة الجسم .

اتصل ثقلان قدرهما ٥ باوندات ، ٧ باوندات بخيط مارّ على بكرة . أوجد عجلة أحدهما .

(٨) تحركت نقطة مادية بعجلة قدرها حـ مدة د فقطعت مسافة ف وسرعتاها الابتدائية والنهائية هما ع ، غ . أثبت أن

$$غ^{2} = ع^{2} + ٢ \text{ حـ } ف$$

فاذا كانت كتلة النقطة المادية ك فأوجد طاقة حركتها بعد مدة قدرها $\frac{1}{2}$ د بدلالة ع ، غ ، ك .

(٩) قطار متحرك بسرعة ٤٠ ميلا فى الساعة أوقف بتأثير الاحتكاك فى نصف دقيقة أثبت أن معامل الاحتكاك = $\frac{١١}{١٨٠}$.

(١٠) أوجد عجلة نقطة مادية متحركة فى محيط دائرة بسرعة ثابتة المقدار .

أدير حجر كتلته باوند واحد فى دائرة أفقيـة بخيط طوله ٣ أقدام فأتم دورتين فى الثانية . .ماشدّ الخيط ؟

(١١) كيف يعبر عن نظرية بقاء الطاقة فيما يتعلق بالديناميكا ؟

بيّن ارتباط هذه النظرية بنظرية استحالة الحركة الدائمة .

كم قدم — باوندا من الشغل يصدر من الاحتكاك لايقاف القطار المذكور بالمسألة التاسعة ؟

(٧) الورقة الثانيـــة

(١) اذكر ماهيـة قاعدة أرشميـدس فى الايدروسـتاتيكا . اشرح طريقة تعيين الثقل النوعى لجسم صلب أخف من المـاء . واستخرج من الشرح قاعدة جبرية لتعيين الثقل النوعى لجسم .

(٢) انغمس لوح مستطيل طوله ٣ أقدام وعرضه قدمان فى المـاء بحيث كان الضلعان الطويلان أفقيين وأحدهما على عمق ٧ أقدام والآخر على عمق $\frac{١}{٢}$ ٨ من الأقدام . أوجد الضغط الواقع على اللوح .

(٣) صف ايدرومتر نكلسن . وأشرح كيفية استخدامه (أولا) لتعيين الثقل النوعى لجسم صلب ، (ثانيا) لتعيين الثقل النوعى لسائل .

(٤) عرّف ارتفاع الجو المتجانس . أثبت أنه غير مرتبط بارتفاع البارومتر . وبيّن تأثير درجة الحرارة فيه أحسب ارتفاع الجو المتجانس فى درجة الصفر مما يأتى :

كثافة الزئبق تساوى كثافة الماء ١٣,٥٩٦ من المرات . وثقل السنتيمتر المكعب من الهواء فى درجة الصـفر المئوية تحت ضـغط قدره ٧٦٠ ملليمترا يساوى ٠,٠٠١٢٩٣ من الجرام .

(تحتوى هذه الورقة أيضا على أسئلة فى الطبيعة)

(٨) المدرســة الحربيــة الملوكية بوولويتش

الامتحان الراقى — الاستاتيكا .

(لإحكام العمل شأن عظيم فى تقــدير الدرجات)

(١) عيّن مقدارا قوتين ولم تعين الزاوية بينهما . فكيف توضعان حتى تكون محصلتهما : (أولا) أكبر ما يمكن ؛ (ثانيا) أصغر ما يمكن ؟

(٢) مامعنى "مركبة" قوة فى اتجاه معين ؟
كيف تحلل قوة حتى يكون لمركبتها فى اتجاه معين مقدار معين ؟

(٣) اذا عُيّن مقدار قوة وخط تأثيرها فاشرح عملا هندســيا لتحليلها الى قوتين متساويتين مارتين بنقطتين معينتين .

(٤) أثبت أن أى ازدواجين متساويى العزم مختلفى الاتجاه يتوازنان (لابأس بالتسليم فى البرهان بأنه يمكن نقل الازدواج من مكان الى آخر فى مســتويه من غير أن يحدث تغير فى تأثيره) .

(٥) أثرت ثلاث قوى متوازية كل تساوى پاوندا واحدا فى قضيب أفقى وكانت القوة التى على اليمين متجهة اتجاها رأســيا الى أعلى . والأخريان الى أســفل . وكان بعداهما عن الأولى قدمين وثلاثة أقدام . ارسم محصلتها وعين مقدارها ووضعها بالضــبط .

(٦) ارسم مجموعة من البكرات بها يمكن أن يوازن ثقــل قدره پاوند واحد ثقلا قدره ٣ پاوندات مهملا الاحتكاك وأثقال البكرات ثم بيّن أنه مهــما كان تركيب المجموعة يجب أن ينزل الثقل الأصــغر ٣ أقدام لرفع الثقل الأكبر مسافة قدم واحـــدة .

(٧) سكن قرص مســتدير ثقيل على مستوٍ مائل خشن بخيط موازٍ للمستوى ممــاس للدائرة أثبت أن القرص يزلق على المســتوى اذا كان معامل الاحتكاك أقل من $\frac{1}{2}$ ظا هـ علما بأن هـ زاوية ميل المستوى .

(٨) وصل بين ثقلين كل يساوى ١١٢ باوندا بخيط مار على البكرتين ا ، ب الواقعتين فى مستقيم أفق واحد . فاذا ربط ثقل صغير يعادل باوندا واحدا مثلا فى الخيط فى منتصف ا ب فأوجد مقدار هبوطه بفرض أن ا ب = ١٠ أقدام .

اذا ربط الثقل الصغير فى نقطة أخرى من الخيط . فماذا يحصل ؟

(٩) اذا انفصل جزء كتلته كَ من جسم كتلته ك فأثبت أن مركز ثقل الجسم الكلى ينتقل فى اتجاه يوازى اتجاه انتقال مركز ثقل الجزء المفصول مسافة قدرها $\frac{كَ}{ك}$ × ف علما بأن ف المسافة بين الموضع الأصلى لمركز ثقل كَ وموضعه الجديد .

ثنيت قطعة مثلثة من الورق حول المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعيها فانطبق الرأس على القاعدة . أوجد مركز ثقل القطعة فى صورتها الجديدة .

(١٠) وضعت ثلاث نقط مادية متساوية وضعا ما على الأضلاع الثلاثة لمثلث ثم انتقلت عليها على ترتيب دائرى فى مسافات تناسب تلك الأضلاع . أثبت أن مركز ثقل هذه النقط لايتغير .

(١١) اذا سلمنا بصحة نظرية السرع التصورية فاستنتج النسبة بين القوة والمقاومة فى المستوى المائل عند ما تكون القوة (أولا) موازية للمستوى و (ثانيا) أفقية .

(١٢) اشرح معنى التوازن الثابت والتوازن غير الثابت ومثل لكلٍ .

(٩) ديناميكا

[يمكن اعتبار عجلة التثاقل ٣٢ قدما فى الثانية فى الثانيـة — لأحكام العمل شأن عظيم فى تقدير الدرجات] .

(١) مانظرية متوازى الأضلاع للسرع ؟

اذا كانت سرعة التيار فى نهر ١$\frac{١}{٢}$ من الأميال فى الساعة . ففى أى اتجاه يبتدئ سابح سرعته ٢$\frac{١}{٤}$ من الأميال فى الساعة حتى يقطع عرض النهر فى جهة عمودية على طوله ؟

(٢) مشى شخص فى طريق بسرعة قدرها ع فرأى برجا على بعد ميل واحد فكانت أقرب مسافة بين البرج والطريق $\frac{١}{٢}$ ميل ما سرعة اقترابه من البرج فى تلك اللحظة ؟ وهل تتغير هذه السرعة من لحظة الى أخرى ؟

(٣) صدمت كرة متحركة أخرى ساكنة صدمة عمودية . صف بالايجاز أهم مايبدو أثناء الصدمة (أولا) اذا كانت الكرتان عديمتى المرونة ٬ (ثانيا) اذا كانتا تامتى المـرونة .

(٤) قذفت نقطة مادية قذفا رأسيا الى أعلى بسرعة ع أوجد مدّة سقوطها وأثبت أنها تساوى مدّة الصعود .

(٥) أسقطت نقط مادية فى لحظة واحدة فزلقت الى أسفل على مستويات مائلة ملساء مشتركة فى الرأس . أثبت أنها تقع على دائرة واحدة فى لحظة ما .

أثبت أيضا أنها تقع على دائرة واحدة فى لحظة ما اذا كانت المستويات متساوية فى الخشونة .

(٦) قُذفت قنبلة بسرعة ١١٠٠ قدم فى الثانية . أوجد النهاية العظمى لمجالها على مستوٍ أفقى بالأميال . هل يمكن أن تصل الى هذه النهاية بالفعل ؟

(٧) قُذف جسم بسرعة معينة فى اتجاه معين ، أوجد مركبتى سرعته الرأسية والأفقية بعد مضى زمن ما . اذا قُذف جسم آخر بعد الأوّل من النقطة عينها بالسرعة نفسها فى هذا الاتجاه فصف هيئة تحرّكه مقارنا لها بالأولى .

(٨) خيط مثبت أحد طرفيه مرّ تحت بكرة متحركة قد عُلق منها ثقل قدره و وفوق بكرة أخرى ثابتة . فعلق من طرفه الآخر ثقل قدره ن فكانت أجزاء الخيط الثلاثة رأسية . فاذا أهمل ثقلا البكرتين فأثبت أن عجلة نزول الثقل و تساوى $\frac{و - ٢ ن}{و + ٤ ن}$ ء وحقق هذه النتيجة (أولا) فى الحالة التى فيها يكون ن صفيرا بالنسبة الى و ٬ (ثانيا) فى الحالة التى فيها يكون و صفيرا بالنسبة الى ن .

(٩) نظمت خرزة فى خيط بحيث تزلق عليه بلا احتكاك . أثبت أنه اذا ابتدأت الخرزة تتحرك على قوس القطع الناقص الذى يخصص حركتها كانت سرعتها منتظمة . أثبت أيضا أن شدّ الخيط يتغير تغيرا عكسيا بحاصل ضرب مسافتى الخرزة عن البورتين .

(١٠) عرف الشغل الذى تعمله قوة عند ما تنتقل نقطة تأثيرها مسافة معينة فى اتجاه تأثير القوة . اذا تحركت نقطة التأثير صانعة زاوية مع اتجاه القوة . فما مقدار الشغل المبذول فى هذه الحالة ؟

تحركت الكتلة ك بسرعة ع فأثرت فيها قوة ثابتة فى اتجاه تحركها حتى صارت سرعتها غ . أثبت أن الشغل الذى عملته القوة يساوى $\frac{1}{2}$ ك غ^2 − $\frac{1}{2}$ ك ع^2 .

(١٠) امتحان العلوم والفنون لسنة ١٨٩٦

ميكانيكا نظرية — الأجسام الصلبة

[لايجوز أن يجيب الطالب عن أكثر من ٨ أسئلة]

(١) عرّف السرعة الزاوية لنقطة متحركة بالنسبة الى نقطة ثابتة . ما الأحوال التى تكون فيها السرعة الزاوية للنقط المتحركة مساوية سرعتها الطولية مقسومة على بعدها عن النقطة الثابتة .

ارسم المثلث ا ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٢ قدما . اذا تحركت نقطة على ب حـ بسرعة ١٠ أقدام فى الثانية . فما سرعتها الزاوية بالنسبة الى ا عند ما تكون هى فى حـ ؟

(٢) أذكر القانون الثانى فى الحركة لنيوتن . وبيّن بالايجاز كيف تستخرج منه مقياسا للقوى . ما وحدات ق فى المعادلة ق = ك حـ عند ماتكون وحدات الكتلة والمسافة والزمن الباوند والقدم والثانية ؟

(٣) عرّف الازدواج . واشرح كيفية تعيين محصلة قوتين مكونتين ازدواجا وقوة ثالثة . ارسم المربع ا ب حـ ء فاذا أثرت قوة قدرها ٨ من ا نحو ء وأخريان قدر كل ١٢ من ا نحو ب ومن حـ نحو ء فأوجد محصلتها وأوجد المحصلة أيضا فى حالة تأثير القوة الأولى من ء نحو ا .

(٤) أذكر القاعدة المستعملة لايجاد مركز ثقل هرم ثلاثى متجانس الكثافة مع البرهان .

(٥) اذا تضاغط جسمان أملسان . فما اتجاه الفعل ورد الفعل بينهما ؟
اذا كان الجسمان خشنين . فما القوة الأخرى التى قد تؤثر فيهما ؟
وُضع جسم على مستوٍ مائل فسكن . ما مقدار الاحتكاك الذى أثر فيه ؟
اذا ازداد ميل المستوى . ففى أى الأحوال يبقى الجسم ساكنا ؟

(٦) أسند قضيب منتظم الى نقطة ملساء بحيث كان طرفه الأسفل مرتكزا على مستوٍ أفقى خشن . فاذا تعين ارتفاع النقطة عن المستوى وكذا زاوية ميل القضيب عند مايكون فى وضع التوازن النهائى فأوجد طوله .
ما النهاية العظمى لميل القضيب اذا تعين معامل الاحتكاك ؟

(٧) ما نظرية الشغل التصورى (أو السرع التصورية) ؟
حقق هذه النظرية فى ثلاث بكرات متحركة حيث يكون كل خيط مربوطا بالعارضة التى تعلق منها المجموعة .

(٨) ا د ، د ط هما الاحداثيان الأفقى والرأسى لنقطة ط على منحنٍ فاذا مثل ا د المسافة التى انتقلت فيها نقطة تأثير قوة . ومثـل ط د مقدار هذه القوة بعد ما انتقلت تلك المسافة فأثبت أن مساحة المنحنى تمثل الشـغل الذى بذلته القوة وقت انتقالها .

(٩) تمـاست دائرتان من الخـارج فى ا ومركزاهما على خط رأسى واحد . وقد رُسم المسـتقيم ط ا ى من نقطة مثل ط على محيط الدائرة العليا فقابل محيط الدائرة السفلى فى ى . فاذا زلقت عليه نقطة مادية فأثبت أن الزمن اللازم لقطعه المسافة ط ى ثابت مهما كان وضع ط .
قارن أيضا بين المدتين اللتين تقطع فيهما النقطة المـادية المسافتين ط ا ، اى .

(١٠) اذا زلقت نقطة مادية على مستوٍ مائل خشن فأوجد عجلتها .
ما الأحوال التى فيها تكون هذه العجلة تقصيرا ؟
زاوية الاحتكاك بين نقطة مادية ومستوٍ ٣٠° . وزاوية ميل المستوى ١٥° فاذا أخذت النقطة تتحرك الى أسفل بسرعة ١٠٠ قدم فى الثانية فما المسافة التى تقطعها قبل أن تسكن ؟

(١١) اذا تحركت كتلة معينة على محيط دائرة معينة بسرعة معينة فماذا تعرف من أمر القوة التي تؤثر في الكتلة ؟ برهن .

(١٢) وُصِّلت النقطة المـادية ا التي كتلتها ٣ الى النقطة المـادية ب التي كتلتها ٥ بخيط غير قابل للامتداد . ثم وضعت ب على نضد أملس فتدلت ا رأسية من حافته . فاذا كان الخيط في أول الأمر غير مشدود . ولم يشدّ إلا بعد ما سقطت ا ٩ أقدام . فما السرعة الابتدائية للنقطة ب ؟

أي جزء ينعدم من طاقة حركة المجموعة عند ما يشدّ الخيط ؟

(١١) جامعة لنـــدن

الامتحان المتوسط في العلوم لسنة ١٨٩٦ — الرياضة المختلطة

(١) أثرت قوتان في النقطة ط في المستقيمين ط ا ، ط ب . ، ا ، ب نقطتان ثابتتان ومقدارا القوتين هما م × ط ا ، د × ط ب . علما بأن م ، د عددان ثابتان . أثبت أنه مهما كان وضع ط فمحصلة القوتين تمر دائما بنقطة ثابتة على ا ب . ومقدارها يساوى البعد بين ط وتلك النقطة (م + د) من المرات .

(٢) التصق سلكان بحيث كان أحدهما عموديا على الآخر . ومال كلٌّ على الأفق بزاوية ٤٥° فجرت عليهما حلقتان صغيرتان متساوتان كتلة كل ك . وقد اتصلت إحداهما بالأخرى بخيط مربوطة في وسطه خرزة كتلتها كَ . فاذا كان كلا القسمين من الخيط يميلان على الخط الرأسي بزاوية هـ في حالة التوازن فاثبت أن :

$$ظا\ هـ = ١ + \frac{٢ك}{كَ}$$

وأوجد الضغط على كل من السلكين .

(٣) أوجد مقدار محصلة قوتين متوازيتين مختلفتي الاتجاه وكذلك خط تأثيرها .

اذا أثرت قوى متوازية متحدة الاتجـاه في رؤوس مثلث وناسبت مقاديرها الأضلاع المقابلة لتلك الرؤوس فأثبت أن محصلتها تمر دائما بمركز الدائرة المرسومة داخل المثلث .

(٤) اذا عرف مركز ثقل جسم معين الكتلة وكذا مركز ثقل جزء معين مفصول منه فأوجد مركز ثقل الباقى .

ثُنيتْ قطعة من الورق المقوى مربعة الشكل حول المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين من أضلاعها فانطبق أحد رءوسها على مركزها . أوجد مركز ثقلها وهى على هذه الهيئة علما بأن طول ضلع المربع = ا من البوصات .

(٥) قبان طوله ٣ أقدام وثقل القضيب والكفة معا يساوى باوندين وبعدا مركز ثقله ونقطة ارتكازه عن الطرف المعلقة منه الكفة ٤ بوصات ، ٣ بوصات . فاذا كان الثقل المتحرك باوندا واحدا فبين كيف يدرج هذا القبان . وعين أكبر ثقل يمكن وزنه به .

(٦) اشرح كيفية تقدير سرعة نقطة متحركة بالنسبة الى أخرى متحركة .

سار قطار بسرعة ٣٠ ميلا فى الساعة فى سكة مستقيمة . فدخلت قنبلة إحدى العربات فى اتجاه عمودى على اتجاه حركة القطار . وخرجت من نقطة بعدها عن النقطة المقابلة للتى دخلت منها ٣ بوصات . فاذا كان عرض العربة ١٠ أقدام فأوجد سرعة القنبلة .

(٧) أسقط حجر من أعلى برج ارتفاعه ٥٠ قدما . وفى اللحظة عينها قذف آخر رأسيا الى أعلى فمر أحدهما بالآخر على مسافة ٩ أقدام من أعلى البرج . أوجد سرعة قذف الحجر الثانى والزمن الذى مضى قبل رجوعه الى الأرض (ء = ٣٢) .

(٨) بيّن كيفية استخراج مقياس للقوة من القانون الثانى فى الحركة لنيوتن . عرّف الباوندال وعين الثقل الذى يعادله تعيينا تقريبيا .

(٩) الباوندال يساوى ١٣٨٢٥ داينا والقدم تساوى ٠٫٣٠٤٧٩٧ من المتر أوجد عدد الباوندات فى الجرام .

(١٠) وضعت الكتلة ك على مستوٍ أملس مائل على الأفق بزاوية ا واتصل بخيط مارٍ على أعلى المستوى المائل قد عُلقت منه الكتلة كَ . أوجد عجلة ك الى أعلى أو الى أسفل على المستوى . وكذلك شد الخيط .

(١٢) امتحانات العلوم والفنون لسنة ١٨٩٧

الميكانيكا النظرية — الأجسام الصلبة

الامتحان الراقى

[لا يجوز أن يجيب الطالب عن أكثر من ٨ أسئلة]

(١) عرّف السرعة الزاوية لنقطة متحرّكة بالنسبة الى أخرى ثابتة معينة . فى أى الأحوال تكون السرعة الزاوية لنقطة متحرّكة بالنسبة الى نقطة ثابتة تساوى صفرا .

ا ب مستقيم ثابت ، ط نقطة ثابتة خارجة . فاذا تحرّكت النقطة ى على ا ب بسرعة منتظمة فعين سرعتها الزاوية بالنسبة الى ط عند ما تصل الى وضع ما .

(٢) نقطتان ماديتان كتلة إحداهما ك وكتلة الأخرى كَ أثرت فيهما القوتان ط ، ق فازدادت سرعتاهما مقدارى ح ، حَ فى زمن معين . أثبت أنه ينتج من قانون نيوتن أن ط : ق :: ك ح : كَ حَ .

كيف يمكن استنتاج عدد الوحدات المطلقة فى ط من هذه المعادلة ؟

(٣) اذا أثرت ثلاث القوى المتوازنة ط ، ق ، ر فى النقطة م فأثبت أن

(ا) $\frac{\text{ط}}{\text{جا}\ \angle\ \text{ق م ر}} = \frac{\text{ق}}{\text{جا}\ \angle\ \text{ر م ط}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}\ \angle\ \text{ط م ق}}$

(ب) $\text{ط}^2 = \text{ق}^2 + \text{ر}^2 + ٢\ \text{ق ر جتا}\ \angle\ \text{ق م ر}$

اذا كانت مقادير هذه القوى المتوازنة ١٢ ، ١٥ ، ١٩ فارسم بالضبط كيفية تأثيرها .

(٤) عرّف مركز مجموعة من القوى المتوازية . اذا عُرفت قوّتان متوازيتان واحداثيات نقطتى تأثيرهما فأوجد إحداثيي مركزهما .

قوتان متوازيتان مختلفتا الاتجاه مقدارهما ٢ ، ٧ الوحدات فاذا أثرت القوتان فى النقطتين (— ٢ و ١) ، (٣ و — ٤) فأوجد احداثيي مركزهما . وبيّن النقط الثلاث بالرسم .

(٥) ارسم المثلث ا ب حـ الذى فيه ا ب رأسى . وليكن ا حـ ، حـ ب دالّين على قضيبين لا ثقل لهما قد اتصل أحدهما بالآخر فى حـ بمفصل أملس . وثبتا فى النقطتين الثابتتين ا ، ب بمفصلين أملسين . فاذا عُلق ثقل قدره و من حـ فأثبت أن أحد القضيبين يكون فى حالة شدّ والآخر فى حالة تضاغط . وبيّن كيفية تقدير هذين الانفعالين . ثم قدرهما تقديرا عدديا فى الحالة التى يكون فيها ا ب = ٤ ، ب حـ = ٣ ، حـ ا = ٢ ، و = ١٨ طنا

(٦) ك رمز الى معامل الاحتكاك ، ر رمز الى الفعل العمودى بين مستوٍ خشن وجسم مرتكز عليـه . متى يكون الاحتكاك بينهما مساويا ك ر ؟ وهل يمكن أن يكون أقل منه ؟

ارتكز أحد طرفى قضيب منتظم على مستوٍ أفق خشن والآخر على حائط رأسى أملس فاذا مال القضيب على الأفق بزاوية ٤٥° فأوشـك أن يزلق فأوجد معامل الاحتكاك وكذا ميل القضيب حينما يكون مقدار الاحتكاك الواقع نصف الاحتكاك النهائى .

(٧) اذا سلمنا صحة قاعدة الشـغل التصورى فعين النسبة بين القوة المحرّكة والمقاومة فى اللولب العامل بغير احتكاك .

درجة لولب $\frac{١}{٢}$ البوصة . وطول ذراعه ٣٠ بوصة . وقد وجد أنه يمكن رفع ثقل قدره ٣ أطنان بقوة تساوى ثقل ٤٢ باوندا . أوجد عدد القدم — باوندات من الشـغل المبذول فى التغلب على الاحتكاك حين يرفع هذا الثقل مسافة قدم ونصف (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

(٨) ثبت أحد طرفى حبل منتظم . وعلق ثقل من طرفه الآخر . كيف تعين بالرسم مقدار الشغل المبذول فى رفع الثقل بلف الحبل ؟

(٩) إذا قذف جسم فى اتجاه ما فى الفراغ المطلق فأثبت أن مساره قطع مكافئ ا أعلى نقطة من المسار ، ب بؤرته ، د سقط ا على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف. فاذا كان ب د = ٢ ا ب فأوجد نقطة القذف واتجاهه.

(١٠) خيط منتظم تام اللين وضع على نضد أملس أفقى فكاد يتدلى أحد طرفيه من حافته ثم أخذ ذلك الطرف فى السقوط ساحبا باقى الخيط وراءه . أوجد (ا) عجلة السقوط عند مايكون قد مرّ طول معين من الخيط على حافة النضد ، (ب) مقدار الشغل الذى قد بذله التثاقل حتى ذلك الوقت ، (حـ) سرعة الخيط فى تلك اللحظة .

اذكر القواعد (الديناميكية) التى تستنتج منها طريقة الحل .

(١١) سقط جسم على مستوٍ أفقى أملس من ارتفاع معين. فاذا كان معامل الاسترداد بينهما معروفا فأوجد الارتفاع الذى يندفع اليه بعد أوّل نبوة وكذا بعد النبوة الثانية.

(١٢) ارسم ا ب مائلا على الأفق ، ب حـ أفقيا بحيث يكون ا فوق امتداد حـ ب . وليكن ا ب خيطا واصلا بين النقطة الثابتة ا ونقطة مادية ثقيلة فى ب بقيت ساكنة بالشدّ فى الخيط ب حـ . فاذا انقطع هذا الخيط فأثبت أن ثقل النقطة المادية وسط متناسب بين الشدّين فى ا ب قبل قطع ب حـ وبعده .

(١٣) جامعة لندن

الامتحان المتوسط فى العلوم لسنة ١٨٩٧ — الرياضة المختلطة

[تقرب الأجوبة العددية الى رقمين عشريين]

(١) ا حـ ، ب حـ قضيبان طولاهما ٩ أقدام ، ٨ أقدام قد اتصل أحدهما بالآخر بمفصل فى حـ وارتكز طرفاهما ا ، ب على مستوٍ أفقى أملس . ويمنعهما من الزلق الخيط ا ب الذى طوله ١٠ أقدام المتصل بكل منهما . والجميع فى مستوٍ رأسى واحد . فاذا عُلق ثقل قدره ١٠٠ باوند من حـ فأوجد الضغط فى كلا القضيبين . والشدّ فى الخيط . أوجد أيضا جزأى الحمل اللذين يحملهما المستوى فى ا ، ب .

(٢) أثرت قوى فى جسم صلب . تمثلها ا ب ، ٢ ب حـ ، حـ ا مقدارا وموضعا . أوجد مقدار محصلتها وموضعها .

ا ب حـ ى متوازى الأضلاع . قطراه ا حـ ، ب ى . أوجد محصلة قوى يمثلها ا ب ، ب ى ، ى حـ ، حـ ا .

(٣) برهن على أن مركز ثقل الصفيحة المثلثة المتجانســة ا ب حـ يتحد هو ومركز ثقل إطار مركب من ٣ قضبان منتظمة هى ا ب ، ب حـ ، حـ ا التى أثقالهـا متساوية .

أوجد الأثقال التى توضع فى رؤوس مثلث أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ لينطبق مركز ثقلها على مركز الدائرة المرســومة داخله بفرض أن مجمــوع هــذه الأثقال ٢٠ باوندا وأن ثقل المثلث مهمل .

(٤) مرّ خيط خفيف على البكرتين ا ، ب فى مستقيم أفق واحد والبعد بينهما قدم واحدة . وقد حمل فى كل من طرفيه ثقلا قدره ٣ باوندات . وفى وسطه ثقلا قدره باوندان . أوجد المسافة المنخفض بها هــذا الثقل الأخير عن ا ب عند مايسكن .

إذا كانت هذه الأثقال هى ط ، ط ، و ولم تكن البكرتان على استواء واحد فأثبت أنه يمكن تعيين الموضع الذى فيه يسكن الثقل الأخير كما يأتى :

ارسم على الوتر ا ب قوس دائرة رأســية يقابل زاوية معينة ثم ارسم خطا رأسيا من منتصف القوس المكمّل للقوس المذكور آنفا ليقابل الدائرة مرة أخرى فى ى فتكون ى النقطة المطلوبة .

(٥) ثبتت كرتان ثقل كل ١٠ باوندات فى طرفى القضيبين ا ب ، ا حـ اللذين طول كل منهــما قدمان وثقله ٤ باوندات وقد لحم أحدهما بالآخر فى ا فحصرا بينهما زاوية قدرها ٦٠° ثم لحم بهما القضيب ا م الذى طوله قدم واحدة وثقله باوندان بحيث ينصف الزاوية بينهما . أثبت أن هــذا المركب يتزن إذا جعلت م نقطة ارتكازه وكانت ا فوق م فى الجهة الرأســية . ثم أوجد القوة التى إذا أثرت تأثيرا أفقيا فى ا دفعتها مسافة أفقية قدرها بوصتان .

(٦) أثبت بالرسم أو بطريقة أخرى أنه اذا تحرك جسم بسرعة منتظمة العجلة كانت المسافة التى يقطعها فى مدة ما مساوية تلك المدة مضروبة فى متوسط السرعتين الابتدائية والنهائية .

شوهد أن جسما متحركا بتأثير قوة ثابتة قطع ٢٠ قدما فى ثانية ، ٢٥ قدما فى الثانية التالية . ما المسافة التى يقطعها فى الدقيقة التالية لذلك ؟

(٧) العجلة الحادثة من التثاقل تساوى ٣٢٫٢ عند ما تتخذ القـدم والثانيـة وحدتين للطول والزمن . ما مقدارها عند ما يتخذ المتر والساعة وحدتين لها (المتر = ٣٩٫٣٧ من البوصات) .

(٨) تحركت كتلة قدرها پاوند واحد بسرعة ١٠ أقدام فى الثانية على مستوٍ أفقى أملس فصدمت كتلة أخرى قدرها ١٠٠ پاوند مرتكزة على المسـتوى فكانت الصدمة عمودية على السطحين المتماسين . ما السرعة التى تكتسبها الثانية من الأولى بفرض أن السرعة النسبية بعد الصدم تساويها قبله ؟

(٩) اذا كان الثقـل المعلق من أحد طرفى الخيط فى آلة أتود ١٠ پاوندات . فما مقدار الثقل الآخر إذا هبط بعجلة تساوى عشر عجلة التثاقل (يُهمل الاحتكاك وكتلة البـكرة) ؟

مرّ خيط خفيف على البكرتين الثابتتين ا ، ب وحـمل بينهـما البكرة المتحركة حـ المعلق منها جسم كتلته كَ . فاذا عُلق جسم كتلته ك فى كل من طرفى الخيط الخالصين وكانت أقسام الخيط راسـية فأثبت أن الشـد فيه = ك كَ ÷ (ك + ½ كَ) من الپاوندات . وأوجد عجلة سقوط الكتلة كَ .

(١٠) قاطرة قطار كتلته ٢٠٠ طن تجره بقوة ثابتة قدرها ٣٠٠٠ پاوند . فاذا كانت مقاومة الاحتكاك لسير القطار ١٠ پاوندات لكل طن فأوجد الزمن الذى يقطع فيه القطار ٥ أميال ابتـداء من حالة السكون (أولا) اذا كانت السكة أفقيـة (ثانيا) اذا كان هناك ميل الى أسفل قدره ١ فى ١٥٠ أثناء ميلين من ابتداء السير يعقبه ميل الى أعلى قدره ١ فى ٤٥٠ أثناء ثلاثة الأميال الباقية .